Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2003
Übungsblatt 8
4. Juni 2003

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Letzter Abgabetermin: Donnerstag, 12. Juni 2003 (in der Übung)

Aufgabe 1

Beweisen Sie:

a) Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist konvex.

b) Der Durchschnitt beliebig vieler Kegel ist ein Kegel.

c) Der Durchschnitt endlich vieler Polyeder ist ein Polyeder.

d) Die (Minkowski-)Summe zweier Polyeder ist ein Polyeder.

Aufgabe 2

Beweisen Sie folgende Aussage:
Eine Punktmenge ist genau dann ein Polytop, wenn sie ein beschränktes Polyeder ist.

Aufgabe 3

Stellen Sie das durch folgendes System linearer Ungleichungen beschriebene Polyeder als Minkowski-Summe eines Polytops und eines polyedrischen Kegels dar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Zeilen $a_1, \ldots, a_m$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $x, w^T \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß das Farkas-Lemma äquivalent zu folgender Aussage ist:

> Wenn die linearen Ungleichungen $a_1 x \leq 0, \ldots, a_m x \leq 0$ die lineare Ungleichung $wx \leq 0$ implizieren, dann ist w eine nichtnegative Linearkombination der $a_1, \ldots, a_m$, und umgekehrt.