Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2003
Übungsblatt 9
11. Juni 2003

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Letzter Abgabetermin: Mittwoch, 18. Juni 2003 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Seien

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}^T$$

eine Matrix, ein Spalten- bzw. ein Zeilenvektor, mit Submatrizen $A, B, C, D, E, F, G, H, K$, Spaltenvektoren a, b, c und Zeilenvektoren d, e, f (je von geeigneter Dimension). Zeigen Sie, dass dann folgende allgemeine Form des Dualitätssatzes gilt:

$$\begin{aligned} &\max\{dx + ey + fz \,:\, x \geq 0, z \leq 0, Ax + By + Cz \leq a, \\ &\qquad Dx + Ey + Fz = b, Gx + Hy + Kz \geq c\} \\ &= \\ &\min\{au + bv + cw \,:\, u \geq 0, w \leq 0, uA + vD + wG \geq d, \\ &\qquad uB + vE + wH = e, uC + vF + wK \leq f\}, \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass beide Mengen nicht leer sind.

Aufgabe 2

Zeigen Sie folgende Form des Dualitätssatzes für die Lineare Programmierung:

$$\sup\{cx;\ Ax \leq b\} = \inf\{yb;\ y \geq 0, yA = c\}$$

unter der Voraussetzung, dass mindestens eine der beiden Mengen nicht leer ist.

Aufgabe 3

Geben Sie für den $\mathbb{R}^2$ eine geometrische Interpretation des Dualitätssatzes

$$\max\{cx;\ Ax \leq b\} = \min\{yb;\ y \geq 0, yA = c\}.$$

Aufgabe 4

Sei ein Polyeder $P = \{x : Ax \leq b\} \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, und werde für jeden Zeilenindex $i \in \{1, \ldots, m\}$ der i-te Zeilenvektor von A mit a_i bezeichnet. Für eine Teilmenge K von Zeilenindizes sei A_K die aus den Zeilen a_i, $i \in K$ bestehende Teilmatrix von A. Für einen Punkt $x_0 \in P$ heißt die i-te Ungleichung (bzw. Zeile) $a_i x \leq b_i$ *aktiv in* x_0 genau dann, wenn sie mit Gleichheit erfüllt ist, d.h. $a_i x_0 = b_i$. Sei I die Menge der Zeilenindizes, die in *allen* Punkten von P gleichzeitig aktiv sind. Zeigen Sie:

$$\dim P = n - \text{Rang } A_I.$$