Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2003/04
Übungsblatt 10
16. Januar 2004

Diskrete Strukturen I

Abgabe bis Donnerstag, 22. Januar 2004, 12:15 Uhr (in Stellordner vor Raum 03.09.052)

Aufgabe 1

Beweisen Sie folgende Identitäten:

(a) $\sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i} = \delta_{n,i}$,

(b) $\sum_k s_{n,k} S_{k,i}(-1)^{n-k} = \delta_{n,i}$.

Hierbei ist $\delta_{n,i} = 1$, falls $n = i$, und $= 0$, falls $n \neq i$, und $s_{n,k}$ (bzw. $S_{n,k}$) sind die Stirling-Zahlen erster (bzw. zweiter) Art.

Aufgabe 2

Lösen Sie folgende Rekursionen mit Hilfe erzeugender Funktionen:

(a) $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$ $(n \geq 3)$, mit $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

(b) $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$ $(n \geq 1)$, mit $a_0 = 2$.

Aufgabe 3

(a) Sei

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

die zur Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ gehörige so genannte *exponentielle erzeugende Funktion*. Zeigen Sie, dass hier die Ableitung einer Verschiebung des Summationsindex um 1 entspricht:

$$G'(x) = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \frac{x^n}{n!}$$

(b) Zeigen Sie, dass für die exponentielle erzeugende Funktion der Rekursion

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^k}, \qquad a_0 = 1$$

gilt: $A(x) = e^{2x}$. Geben Sie eine explizite Darstellung der a_n's an.

Aufgabe 4

Lösen Sie die folgenden Rekursionen durch geeignete Substitutionen:

(a) $f_n = f_{n-1} \cdot f_{n-2}$ für $n \geq 2$,
$f_1 = 2,\ f_0 = 1$

(b) $f_n = 3f_{n/2} + n$ für $n = 2^k > 1$,
$f_1 = 1$