Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2003/04
Übungsblatt 13
6. Februar 2004

Diskrete Strukturen I

Abgabe bis Donnerstag, 12. Februar 2004, 12:15 Uhr (in Stellordner vor Raum 03.09.052)

Aufgabe 1

Sei G ein zusammenhängender Graph. Für $u \in E$ setzen wir $r(u) = \max(d(u, v) : v \neq u)$. Der Parameter $r(G) = \min(r(u) : u \in E))$ heißt der *Radius* von G, und $Z(G) = \{u \in E : r(u) = r(G)\}$ das *Zentrum* von G.
Zeigen Sie, dass das Zentrum eines Baumes entweder aus einem Knoten oder zwei benachbarten Knoten besteht.

Aufgabe 2

Bestimme die kürzesten Wege von Knoten 1 nach allen Knoten i in dem folgenden gerichteten Graphen, der durch seine Gewichtsmatrix gegeben ist. (Dabei bedeuten fehlende Einträge, dass die entsprechenden Kanten nicht vorhanden sind.)

	1	2	3	4	5	6	7
1			4	10	3		
2			1	3	2	11	
3		9		8	3	2	1
4		4	5		8	6	3
5	1		1	2		3	1
6		1	1	3	2		
7	2	4	3			2	

Aufgabe 3

Sei der vollständige Graph K_n auf den Knoten $\{1, \ldots n\}$ gegeben, und $d_1, \ldots, d_n$ eine Folge natürlicher Zahlen ≥ 1 mit $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Spannbäume, in denen der Knoten i den Grad d_i hat, gleich $\frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \ldots (d_n-1)!}$ ist.

Aufgabe 4

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und w eine nichtnegative Gewichtsfunktion auf den Kanten. Bezeichnen Sie mit $\nu_w(G)$ den maximal möglichen Wert von $w(E')$ für ein Matching $E' \subseteq E$.
Ein Greedy-Algorithmus zum Auffinden eines maximalen Matchings funktioniert ähnlich wie Kruskals Algorithmus für einen maximalen Spannbaum, d.h. er geht die Kanten in der Reihenfolge absteigender Gewichte durch und wählt eine Kante aus, wenn sie mit den schon ausgewählten Kanten keine Knoten gemeinsam hat.
Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus immer ein Matching mit Gewicht mindestens $\frac{1}{2}\nu_w(G)$ findet.