Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2003/04
Übungsblatt 2
31. Oktober 2003

Diskrete Strukturen I

Abgabe bis Freitag, 7. November 2003, 10:30 Uhr (in Stellordner vor Raum 03.09.052)

Aufgabe 1

Entscheiden Sie für folgende Paare von Funktionen f und g, ob jeweils gilt $f(x) \in \mathcal{O}(g(x))$, $f(x) \in o(g(x))$, $f(x) \in \Omega(g(x))$, $f(x) \in \omega(g(x))$ und/oder $f(x) \in \Theta(g(x))$:

1. $f(x) = x \ln x, \quad g(x) = x\sqrt{x}$
2. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x + 7, \quad g(x) = x^3 - 4x^2 - x + 3$

Aufgabe 2

Gilt für die folgenden Funktionen $f(n)$ und $g(n)$, daß $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$, $f(n) \in \Omega(g(n))$ oder $f(n) \in \Theta(g(n))$?

Hinweis: Aus $f(n) \in \Theta(g(n))$ folgt selbstverständlich $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ und $f(n) \in \Omega(g(n))$. In diesem Fall soll aber die stärkste Aussage, also $f(n) \in \Theta(g(n))$ als Lösung angegeben werden.

$$
\begin{array}{ll}
f(n) = (\ln n)^{\ln n} & g(n) = n^{\ln \ln n} \\
f(n) = \ln \ln n & g(n) = \sqrt{\ln n} \\
f(n) = 2^{\sqrt{2 \ln n}} & g(n) = n \\
f(n) = e^n & g(n) = 2^n \\
f(n) = \ln(n!) & g(n) = n \ln n \\
f(n) = (\lceil \ln n \rceil)! & g(n) = n^{\ln \ln \ln n}
\end{array}
$$

Aufgabe 3

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen nicht-leeren Mengen X und Y.

1. Entscheiden und zeigen Sie, ob für beliebige Teilmengen $A_1, A_2 \subset X$ und $B_1, B_2 \subset Y$ gilt:

   (a)

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \\
f^{-1}(B_1 \cap B_2) &= f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \\
f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &= f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)
\end{aligned}
$$

(b)

$$\begin{aligned} f(A_1 \cup A_2) &= f(A_1) \cup f(A_2) \\ f(A_1 \cap A_2) &\subseteq f(A_1) \cap f(A_2) \\ f(A_1 \setminus A_2) &\supseteq f(A_1) \setminus f(A_2) \end{aligned}$$

2. Finden Sie jeweils ein Beispiel für Mengen X, Y, $A_1, A_2 \subset X$ und eine Abbildung $f : X \to Y$, so dass $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ und $f(A_1 \setminus A_2) \neq f(A_1) \setminus f(A_2)$ gilt.

Aufgabe 4

Sei das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ gegeben. Untersuchen Sie die Teilstringrelation $\sqsubseteq\ \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, die definiert ist durch

$$\sqsubseteq \quad := \quad \{(x, y) \mid \exists y_1, y_2 \in \Sigma^* \ : \ y = y_1 x y_2\}.$$

Beispielsweise gilt also $ba \sqsubseteq ccabab$, aber $cb \not\sqsubseteq ccabab$.
Welche der folgenden Eigenschaften treffen auf $\sqsubseteq$ zu: reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv?
Sei $H := \{x \in \Sigma^* \mid x \sqsubseteq abac\}$. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $\sqsubseteq\ \cap (H \times H)$.