Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2003/04
Übungsblatt 3
7. November 2003

Diskrete Strukturen I

Abgabe bis Donnerstag, 13. November 2003, 12:00 Uhr (in Stellordner vor Raum 03.09.052)

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob nachfolgende Mengen G mit den entsprechend angegebenen binären Operatoren Gruppen sind. Beweisen Sie Ihre Behauptung!

a) Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, $G = \mathrm{Abb}(X, X)$ die Menge aller Abbildungen von X nach X. Der binäre Operator $\circ : G \times G \to G$ sei die übliche Komposition von Abbildungen.

b) Sei $G = \mathbb{R}$ mit binärem Operator $\circ : G \times G \to G$ gegeben durch

$$x \circ y = x + y + xy.$$

c) Sei $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mit binärem Operator $\circ$ wie in b).

Aufgabe 2

Sei $(G, \circ, 1)$ eine Gruppe mit $x \circ x = 1$ für jedes $x \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Aufgabe 3

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Auf $\mathcal{P}(X)$ werde durch

$$A \circ B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

ein binärer Operator $\circ$ definiert. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), \circ)$ eine abelsche Gruppe ist. Welches Element ist das Einselement? Welches Element ist das zu $A \in \mathcal{P}(X)$ inverse Element?

Aufgabe 4

a) Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und $G = \mathrm{Sym}(M)$ die symmetrische Gruppe von M, d.h. G ist die Menge aller bijektiven Abbildungen von M nach M mit der Komposition als binärem Operator. Sei $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass

$$H = \{f \in G \mid f(N) = N\}$$

eine Untergruppe von G ist.

b) Zeigen Sie, dass es in der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$ Elemente $a, x, y \in \mathcal{S}_3$ gibt, für die $ax = ya$ und $x \neq y$ gilt.