Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2003/04
Übungsblatt 4
14. November 2003

Diskrete Strukturen I

Abgabe bis Donnerstag, 20. November 2003, 12:00 Uhr (in Stellordner vor Raum 03.09.052)

Aufgabe 1

Eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ($n \geq 2$) heißt *Zyklus der Länge* r ($2 \leq r \leq n$), wenn es r paarweise verschiedene Elemente $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$ derart gibt, dass gilt:

$$\begin{array}{lcll} \sigma(i_k) & = & i_{k+1} & \text{für } k = 1, \ldots, r-1 \\ \sigma(i_r) & = & i_1 & \\ \sigma(i) & = & i & \text{für } i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}; \end{array}$$

man schreibt dann $\sigma = (i_1, \ldots, i_r)$. Zwei Zyklen $(i_1, \ldots, i_r)$ und $(i'_1, \ldots, i'_s)$ heißen *disjunkt*, wenn

$$\{i_1, \ldots, i_r\} \cap \{i'_1, \ldots, i'_s\} = \emptyset$$

gilt. Zeigen Sie:

a) Sind σ und τ disjunkte Zyklen in $\mathcal{S}_n$, so gilt $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.

b) Jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{\text{id}\}$ (id = identische Abbildung, $x \mapsto x$) ist ein Produkt von paarweise disjunkten Zyklen, d.h. es gibt paarweise disjunkte Zyklen $\tau_1, \ldots, \tau_p$ in $\mathcal{S}_n$ ($p \in \mathbb{N}$) mit $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$.

c) Die Darstellung in b) ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig, d.h. sind $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$ und $\sigma = \tau'_1 \circ \cdots \circ \tau'_q$ zwei Darstellungen von σ als Produkt von paarweise disjunkten Zyklen, so gilt $p = q$ und $\{\tau_1, \cdots, \tau_p\} = \{\tau'_1, \cdots, \tau'_q\}$.

Aufgabe 2

Man schreibe die folgende Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{14}$ als Produkt von paarweise disjunkten Zyklen:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Kardinalität von $\mathbb{Z}_n^*$, wenn $n = pq$ das Produkt zweier Primzahlen p, q ist. (Hinweis: Die Kardinalität von $\mathbb{Z}_n^*$ ist gleich $\varphi(n)$, wobei φ die Eulersche φ-Funktion ist.)

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass eine Boolesche Algebra $A = \langle S, \oplus, \otimes, \sim, 0, 1\rangle$ (bei Teilaufgabe d sollen nur endliche S bertrachtet werden) folgende Eigenschaften besitzt. Dabei gibt atom(a) für $a \in S$ an, ob a ein Atom der Algebra ist oder nicht.

a) eindeutiges Inverses:

$$b \oplus c = 1 \wedge b \otimes c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = \sim b$$

b) De-Morgan-Regeln:

$$\begin{aligned} \sim (b \oplus c) &= \sim b \otimes \sim c \\ \sim (b \otimes c) &= \sim b \oplus \sim c \end{aligned}$$

c) elementare Eigenschaft von Atomen I:

$$\text{atom}(a) \wedge \text{atom}(b) \wedge a \neq b \quad \Rightarrow \quad a \otimes b = 0$$

d) elementare Eigenschaft von Atomen II:

$$\text{Falls } (\forall a \in S)[\text{atom}(a) \Rightarrow a \otimes b = 0], \text{ dann } b = 0$$