Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2003/04
Übungsblatt 9
9. Januar 2004

Diskrete Strukturen I

Abgabe bis Donnerstag, 15. Januar 2004, 12:15 Uhr (in Stellordner vor Raum 03.09.052)

Aufgabe 1

(a) Seien $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Weiterhin seien $k_1, \ldots, k_m$ nicht-negative ganze Zahlen mit $k_1 + \ldots + k_m = n$. Zeigen Sie, dass es genau

$$C(n; k_1, k_2, \ldots, k_m) := \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$$

Abbildungen $f : N \to M$ gibt, so dass $f^{-1}(j) = \{1 \leq i \leq n : f(i) = j\}$ die Mächtigkeit k_j hat ($j = 1, \ldots, m$). Die Zahlen $C(n; k_1, k_2, \ldots, k_m)$ heißen *Multinomial-Koeffizienten*. (Im Falle $m = 2$ erhält man die üblichen Binomial-Koeffizienten).

(b) Mit den Bezeichnungen aus (a) gilt:

$$C(n; k_1, \ldots, k_m) = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-k_2\cdots-k_{m-1}}{k_m}.$$

(c) Zeigen Sie

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} C(n; k_1, \ldots, k_m)\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m},$$

wobei sich die Summation über alle Tupel $(k_1, \ldots, k_m)$, $k_i \in \mathbb{N}_0$, mit $k_1 + \ldots + k_m = n$ erstreckt.

Aufgabe 2

Die Numeralia, zahlentheoretisch bedeutsame Einzeller, besitzen die Fähigkeit, sich wahlweise dezimal oder hexagesimal fortzupflanzen. Aus einem Tierchen können durch Zellteilung also 10 bzw. 60 neue entstehen. Der Abgang eines Tierchens sei zudem nur durch Zellteilung möglich. Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller möglichen Populationszahlen, die aus einem Tierchen durch iterierte Zellteilung entstehen können.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P} = \{1 + 9n + 59m : n, m \in \mathbb{N}_0\}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass aus einem Tierchen durch iterierte Zellteilung niemals 464 Tierchen entstehen können. (Bem.: Man kann sogar zeigen, dass jede natürliche Zahl > 464 eine mögliche Populationszahl ist, d.h. in $\mathcal{P}$ liegt.)

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe geeigneter erzeugender Funktionen die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie mit Hilfe der Partiellen Summation

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$$

(b)

$$\sum_{k=m}^{n} k \cdot \binom{k}{m}$$