Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr/Dr. Sven Kosub
Moritz Maaß

Wintersemester 2003/04
Übungsblatt 1
7. November 2003

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

Abgabetermin: 14.11.2003 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen gelten (mit Begründung)?

1. $n^2 \log n = O\left(n^3\right)$
2. $\log^3 n = \Omega(n)$
3. $n^2 + 10^{100} n = \Theta(n^2)$
4. $n^2 + 2n = \frac{1}{2} n^2 + o(n^2)$

Aufgabe 2

In einem fiktiven Land mit n Städten gibt es nur Einbahnstraßen. Jede Stadt ist mit jeder durch eine Straße verbunden. Für zwei beliebige Städte a, b gilt, dass man entweder von a nach b oder von b nach a kommen kann, aber nicht beides. Zeigen Sie, dass es mindestens eine Stadt z gibt, die immer über höchstens einen Zwischenstopp erreicht werden kann. Für eine beliebige Stadt a gilt also, dass man entweder von a nach z kommt, oder es gibt eine Stadt b und man kommt von a nach b nach z.

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgenden Satz:
Seien $a \geq 1, b > 1$ und $k \in \mathbb{N}$ konstant, $f(n)$ eine Funktion und $T(n)$ definiert durch die Rekursionsgleichung $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, $n = b^k$. Dann ist

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & \text{falls } f(n) = O(n^{\log_b(a) - \epsilon}) \text{ für ein konstantes } \epsilon > 0, \\ \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n), & \text{falls } f(n) = \Theta(n^{\log_b a}), \\ \Theta(f(n)), & \text{falls } f(n) = \Omega(n^{\log_b(a) + \epsilon}) \text{ für ein konstantes } \epsilon > 0 \\ & \text{und } af(n/b) \leq cf(n) \text{ für ein konstantes } c < 1. \end{cases}$$

Aufgabe 4

Geben Sie eine geschlossen Form für die folgenden Summen an (mit Beweis)

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} k 2^k$
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{k}{m}$
4. $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} k\right)^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} k^3$