Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Jens Ernst

WS 2003/2004
Übungsblatt 4
19. November 2003

Grundlegende Algorithmen

Letzter Abgabetermin: Freitag, 21. November 2003 (nach der Vorlesung)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei T ein Binärbaum mit Tiefe $d := d(T)$. Beweisen Sie:

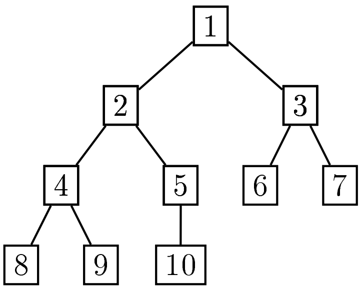
a) T besitzt innerhalb des levels ℓ (mit $1 \leq \ell \leq d$) höchstens $2^{\ell-1}$ Knoten.

b) T besitzt höchstens 2^{d-1} Blätter.

c) T besitzt insgesamt höchstens $2^d - 1$ Knoten.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sei ein Heap, dessen Knoten (in der gewohnten graphischen Darstellung) levelweise von links nach rechts numeriert werden. Die Numerierung beginne mit 1 an der Wurzel. Beispiel:



Sei v ein beliebiger, mit i numerierter, interner Knoten. Zeigen Sie folgende Beziehungen:

a) Das linke Kind von v erhält die Nummer $2i$.

b) Das rechte Kind von v (falls vorhanden) erhält die Nummer $2i + 1$.

c) Der Vater von v (falls vorhanden) erhält die Nummer $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$.

d) Der level von v ist gleich der Länge der Binärdarstellung von i, also $\ell(i) = \lfloor \log i \rfloor + 1$.

Termin und Ort der Midterm-Klausur: 12.12.2003, Raum MI HS1

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Ein ungerichteter Graph heißt *zusammenhängend*, wenn man durch das Überqueren von Kanten von jedem beliebigen Knoten aus zu jedem beliebigen anderen Knoten gelangen kann. Beweisen Sie: Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist genau dann ein Baum, wenn gilt: $|E| = |V| - 1$. (Hier ist nicht festgelegt, welcher Knoten die Wurzel ist.)

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Binärbaum mit n Knoten. Die *Distanz* zwischen zwei Knoten v und v' in G ist die minimale Anzahl der Kanten, die man von v aus überqueren muß, um zum Knoten v' zu gelangen. Man beachte: Die Distanz zwischen je zwei Knoten ist immer eindeutig definiert. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der eine $n \times n$-Matrix konstruiert, welche für alle i und j mit $1 \leq i, j \leq n$ in Zeile i und Spalte j die Distanz zwischen den Knoten v_i und v_j enthält. *Hinweis: Verwenden Sie Algorithmenentwicklung per Induktion*

Ich bin damit einverstanden, dass mir die Ergebnisse (d.h. die Punkte) meiner abgegebenen Übungsaufgaben regelmässig per Email zugeschickt werden.

Email ____

Unterschrift ____________________________________