Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2004
Übungsblatt 3
7. Mai 2004

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Sei α eine irrationale Zahl. Gibt es ein endliches Spiel mit einer fairen Münze, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Spieler gewinnt, gleich α ist? (Bemerkung: Ein Spiel heißt endlich, wenn der Gewinner mit Wahrscheinlichkeit 1 nach einer endlichen Zahl von Zügen feststeht.)

Aufgabe 2

Die Firma Data Systems Intl. Inc. (DSII) hat ein neues Freizeitgesetz für ihre Mitarbeiter erlassen: Jeder Arbeiter muss an jedem Tag im Jahr arbeiten (also auch an Wochenenden und Feiertagen) außer einer von ihnen hat Geburtstag - dann bekommt die ganze Firma frei. Wenn es 365 Tage im Jahr gibt und die Firma ihre Mitarbeiter rein zufällig einstellt (also nicht bevorzugt Leute mit gleichem Geburtstag), wie viele Leute sollte sie dann einstellen, damit die erwartete kumulierte Anzahl der Arbeitstage[1] aller Mitarbeiter maximiert wird? Wie viele Tage muss jeder Arbeiter in diesem Fall pro Jahr arbeiten?

Aufgabe 3

Für gegebenes n ziehen wir Zahlen aus $\{0, 1/n, 2/n, \ldots, 1\}$ mit Zurücklegen so lange, bis die Summe s der gezogenen Zahlen ≥ 1 ist. Wie groß ist der Erwartungswert für die Anzahl der Zahlen, die wir ziehen müssen, wenn $n = 2$? (Bemerkung: Wir werden im Verlauf der Vorlesung sehen, dass $\mathbb{E}(\text{Anz. Züge}) \to e$ für $n \to \infty$)

Aufgabe 4

Seien X und Y Zufallsvariablen für zwei unabhängige Ereignisse wobei $\mathbb{E}(Y) = 2$, $\mathbb{E}(X^2Y) = 6$, $\mathbb{E}(XY^2) = 8$ und $\mathbb{E}((XY)^2) = 24$. Wie groß ist $\mathbb{E}(X)$?

Aufgabe 5

Der Wiener Opernball muss kürzer werden! Daher schlägt der Oberbürgermeister von Wien folgenden Ablauf für den nächsten Ball vor: Ursprünglich sind N Paare eingeladen. Vor jedem Tanz werden die Partner einander zugelost. Wer dabei seinen ursprünglichen Partner zum Tanzen zugelost bekommt, muss die Tanzfläche am Ende des jeweiligen Tanzes verlassen. Wie viele Tänze $\mathbb{E}(X_N)$ sind auf dem nächsten Opernball zu erwarten? Überlegen Sie sich zur Lösung der Aufgabe zunächst den Erwartungswert für $N = 1, 2, 3$ und beweisen Sie dann induktiv eine Verallgemeinerung Ihrer Überlegungen. (Hinweis: Für die Zufallsvariable $Y_k =$"# Fixpunkte bei zufälliger Permutation von k Objekten" gilt $\mathbb{E}(Y_k) = 1$)

[1]Beispiel: Wenn die Firma DSII 10 Mitarbeiter mit unterschiedlichen Geburtstagen hat, dann leisten diese kumuliert $10 \cdot 355$ Arbeitstage pro Jahr.