Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2004
Übungsblatt 4
14. Mai 2004

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Gegeben zwei Zufallsvariablen X und Y. Zeigen Sie:

a) Wenn X und Y unabhängig sind sowie den gleichen Erwartungswert und die gleiche Varianz haben, so gilt $\mathbb{E}((X-Y)^2) = 2\mathrm{Var}(X)$.

b) Wenn X und Y die gleiche Varianz haben, so gilt $\mathbb{E}((X+Y)(X-Y)) = \mathbb{E}(X+Y)\mathbb{E}(X-Y)$.

c) Es gilt $\mathrm{Var}(X+Y) + \mathrm{Var}(X-Y) = 2\mathrm{Var}(X) + 2\mathrm{Var}(Y)$.

Aufgabe 2

Wir wählen nacheinander zufällig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz folgender Zufallsvariablen:

a) $X :=$ Anzahl der Züge (mit Zurücklegen), bis `C` gezogen.

b) $Y :=$ Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen), bis `C` gezogen.

c) $Z :=$ Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen), bis beide `O` gezogen.

Aufgabe 3

Ein Geigerzähler registriert mit Wahrscheinlichkeit 10^{-4} ein von einer Quelle Q emittiertes Teilchen. Wenn Q 30 000 Teilchen emittiert, wie groß ist dann (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass der Zähler kein Teilchen registriert? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als 2 Teilchen registriert?

Aufgabe 4

Es wird so lange gewürfelt, bis jede der Zahlen $1, \ldots, 6$ einmal gekommen ist. Sei der Wert der Zufallsvariable X durch die Anzahl der Würfe bestimmt. Wie groß sind $\mathbb{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$?

Aufgabe 5

Heureka! Wir haben eine Maschine erfunden, die DS-II Hausaufgaben automatisch löst, und werden sie gleich morgen in Betrieb nehmen. Aufgrund der Komplexität der Aufgaben ist die Maschine allerdings recht fehleranfällig und geht mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[t] = C/t^4$ in genau t Tagen von heute an kaputt.

a) Wie groß ist C?

b) Welche Lebensdauer erwarten Sie für die Maschine? (Hinweis: Sie dürfen $\zeta(3) \approx 1.2021$ annehmen, wobei ζ die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(\sigma) = \sum_{n \geq 1} n^{-\sigma}$ sei.)

c) Welche Varianz hat die erwartete Lebensdauer?

d) In 10 Tagen stellen wir fest, dass die Maschine immer noch läuft. Wie lange erwarten wir nun, dass es dauert, bis sie kaputt geht?