Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2004
Übungsblatt 11
2. Juli 2004

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Beim Testen von Hypothesen bezeichnet man die zu überprüfende Hypothese (*Nullhypothese*) generell mit H_0 und die *Alternative* mit H_1. Ein Tierhändler erhält ein Paket mit 100 Frettchen. Er will testen, ob weniger als zehn (< 10) dieser Frettchen aggressiv und bissig sind. Dazu hält er zehn Frettchen seinen Finger hin und nimmt das Paket nur an, wenn ihn keins davon beißt (wir nehmen an, dass ein aggressives Frettchen sofort zubeißen würde). Wie lauten die Hypothesen des Händlers? Was ist das Niveau des Tests?

Aufgabe 2

In einer großen Stadt gibt es N Taxis, die mit den Nummern $1, \ldots, N$ beschriftet sind. Wir stehen an der Straße und beobachten die Taxis, dabei notieren wir uns deren Nummer. (Wiederholungen werden ignoriert). Sei $x_1, \ldots, x_n$ die aufsteigend sortierte Folge der beobachteten Nummern. Nun wollen wir die Anzahl N der Taxis schätzen.

a) Was ist der Maximum Likelihood Schätzer für N? Ist dieser erwartungstreu?

b) Geben Sie einen Schätzer für die Anzahl der Taxis an, der N dadurch abschätzt, dass er versucht, die Größe der nicht beobachteten Lücke $x_n+1, \ldots N$ oberhalb von x_n abzuschätzen.

Aufgabe 3

Sei X die Anzahl der Unfälle in einer Stadt pro Woche und Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Wir wollen aus der Beobachtung von X die Wahrscheinlichkeit ableiten, dass in den folgenden drei Wochen kein Unfall geschieht (also $(\Pr[X = 0])^3$). Zeigen Sie: Ist dieser Schätzer erwartungstreu, dann liefert er unsinnige Schätzwerte!
(Hinweis: $\sum_{i=0}^{\infty} k^i \cdot \frac{\lambda^i}{i!} = e^{k \cdot \lambda}$ kann dazu verwendet werden, k zu bestimmen.)

Aufgabe 4

Seien $X_1, X_2, \ldots X_n$ unabhängig und gleichverteilt in $\{1, 2, \ldots b\}$, $b \in \mathbb{N}$. Geben Sie zum Niveau $1 - \alpha$ ein Konfidenzintervall für b aufgrund der Beobachtung von $X = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ an.
(Hinweis: Hier handelt es sich beim Konfidenzintervall um eine endliche Menge)

Zum Nachdenken

Und wieder mal ein Paradoxon, diesmal vom deutschen Philosophen Carl Gustav Hempel (1905-1997) zum Thema "Testen von Hypothesen": Nehmen wir an, wir wollen die Hypothes "alle Krähen sind schwarz" testen. Dies können wir auf die Art

$$\text{Krähe} \implies \text{schwarz}$$

testen; wir fangen also nacheinander Krähen und schauen dann, ob diese schwarz sind. Jedes Mal, wenn die gefangene Krähe schwarz ist, wird unsere Hypothese wahrscheinlicher. Nun der Clou: Die obige Relation ist logisch äquivalent zu "$\neg$schwarz $\Rightarrow$ $\neg$Krähe." Das heißt, wir könnten die Hypothese auch testen, indem wir bei allen nichtschwarzen Dingen überprüfen, ob sie keine Krähen sind. Also würde ein blaues Hemd von Ihnen die Hypothese untermauern, dass alle Krähen schwarz sind! (Es würde nach diesem Argument sogar die Hypothese unterstützen, dass alle Heringe rosa sind!)
(Hinweis: Wenn Sie nach der Auflösung des Paradoxons suchen, beachten Sie, dass der Fehler *nicht* in der logischen Umformung liegt.)