Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2004
Übungsblatt 12
9. Juli 2004

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Das Computeralgebra-Programm Maple ist auf den TU-Rechnern installiert und eine große Hilfe im Leben allgemein sowie bei vielerlei Rechnungen. Zum Thema "Wahrscheinlichkeitetheorie und Statistik mit Maple" finden Sie zwei sehr gute Einführungen unter `http://www.engineering.usu.edu/cee/faculty/gurro/MyBooks/MapleStatIntro.pdf` sowie unter `http://www.mas.ncl.ac.uk/~ndjw1/teaching/maple/`. Ein Tutorial zur Matrizenrechnung mit Maple finden Sie z. B. unter `http://oregonstate.edu/~peterseb/maple/docs/341mp.pdf`. Bitte machen Sie sich mit den Grundfunktionen vertraut, und lösen Sie dann folgende Aufgabe mit Hilfe von Maple: Gegeben eine Indikatorvariable I und eine Variable $X \in \{A, C, G, T\}$.[1]. Wir beobachten nun I und X und erhalten dabei folgende Tabelle mit den Häufigkeiten gemeinsamen Auftretens:

	X="A"	X="C"	X="G"	X="T"
I=1	1240	1558	210	1250
I=0	1301	1695	165	1200

Machen Sie einen χ^2-Test, der mit 99%-iger Sicherheit die Hypothese "H_0: I und X sind abhängig" verwirft, wenn Sie falsch ist.
(Hinweis: Für Aufgabe 4 sollten Sie auch Maple verwenden.).

Aufgabe 2

Gegeben eine Markovkette mit Zustandsmenge $\{\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}\}$, $p_{n(n+1)} = 2/3$ und $p_{n0} = 1/3$ für alle $n \in \mathcal{S}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich nach langer Zeit im Zustand i zu befinden?

Aufgabe 3

Zwei Zustände A und B einer Markovkette gehören zu einer Kommunikationsklasse genau dann, wenn A von B aus erreichbar ist und umgekehrt. Gegeben eine Markovkette mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} .5 & .5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .3 & .7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .1 & 0 & .9 & 0 \\ .25 & .25 & 0 & 0 & .25 & .25 \\ 0 & 0 & .7 & 0 & .3 & 0 \\ 0 & .2 & 0 & .2 & .2 & .4 \end{pmatrix};$$

welche Zustände bilden eine Kommunikationsklasse? Welche davon sind rekurrent, welche transient? Wir starten im Zustand 0. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich nach einer längeren Zeit im Zustand 0 zu befinden?

Aufgabe 4

Betrachten Sie nochmals die Markovkette aus der letzten Aufgabe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich nach einer längeren Zeit im Zustand 0 zu befinden, wenn wir im Zustand 5 starten? (Hinweis: Betrachten Sie zwei Teilmatrizen von M. Die eine, Q, stellt die Übergänge der transienten Klasse in sich selbst dar; die andere, S, die Übergänge von der transienten Klasse in die rekurrente. Die Inverse einer Matrix M kann mit Maples `LinearAlgebra[MatrixInverse](M)` Befehl berechnet werden.)

[1] Das Problem stammt aus der Anwendung von Markovketten in der Bioinformatik beim Finden von Genen in Genomsequenzen.