Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr/Dr. Sven Kosub
Stefan Eckhardt

Wintersemester 2004/05
Übungsblatt 2
10. Dezember 2004

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

Abgabetermin: 08.11.2004 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass man einen Binärzähler mit k Binärstellen[1] so implementieren kann, dass die Operationen Inc (Erhöhen des Zählers um 1) und Reset (Zurücksetzen aller Ziffern auf 0) beide jeweils amortisierte Zeit $O(1)$ pro Operation benötigen.

Aufgabe 2

Wir wollen für $l, r \in \mathbf{N}$ mit $l < r$ eine zufällige Zahl aus dem Bereich $\{l, \ldots, r\}$ mit Hilfe von Zufallsbits erzeugen: Beschreiben Sie, wie Sie den Befehl

$$\text{RANDOM } x \text{ IN}\{l, l+1, \ldots, r\}$$

mit Hilfe von

$$\text{RANDOM } x \text{ IN}\{0, 1\}$$

implementieren können. Wie groß ist die erwartete Laufzeit Ihrer Implementierung in Abhängigkeit von l und r?

Aufgabe 3

In der Vorlesung wurden dynamische Felder behandelt, bei denen immer neue Elemente hinzugefügt werden. Wir wollen nun einen Stack mit einem dynamischen Feld implementieren, so dass auch Elemente gelöscht werden können. Beim Löschen soll die Feldgröße angepasst werden. Wählen Sie die Vergrößerungs- und Verkleinerungsstrategie für das dynamische Feld so, dass sowohl die Push-, als auch die Pop-Operation amortisierte Zeit $O(1)$ benötigen.

Aufgabe 4

Wir betrachten randomisierte Algorithmen mit Funktionswerten als Ausgabe. Angenommen wir hätten einen randomisierten Algorithmus A, der in Zeit $O(t)$ arbeitet, und für alle Eingaben x mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$ einen Funktionswert $A(x)$ ausgibt.
Zeigen Sie, dass es unter dieser Annahme für alle $\varepsilon > 0$ einen randomisierten Algorithmus A' gibt, der in Zeit $O(t \cdot \log \frac{1}{\varepsilon})$ arbeitet und für alle Eingaben x mit Wahrscheinlichkeit $1 - \varepsilon$ den Funktionswert $A'(x) = A(x)$ ausgibt.

[1] d.h. jede darstellbar Zahl wird mit genau k Bit dargestellt, also $0 = \underbrace{0 \ldots 0}_{k \text{ mal}}$