Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Moritz Maaß
Hanjo Täubig

Sommersemester 2005
Trainingsblatt 0
22. April 2005

Informatik IV

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a. $n^2 \log n = O(n^3)$

b. $\log^3 n = \Omega(n)$

c. $n^2 + 10^{100} n = \Theta(n^2)$

d. $n^2 + 2n = \frac{1}{2}n^2 + o(n^2)$

Geben Sie für folgende Paare von Funktionenklassen jeweils die Beziehungen $(\subset, \subseteq, =, \supset, \supseteq)$ an:

e. $O\left(\binom{n}{k}\right)$ und $O(2^n)$

f. $\Omega(\log_2 n)$ und $\Omega(\sqrt{n})$

g. $o\left((\log n)^{\log n}\right)$ und $o(2^n)$

h. $\omega\left(n!\right)$ und $\omega\left(n^n\right)$

Aufgabe 2

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit der Eigenschaft, dass zwischen je zwei Knoten genau eine Kante liegt. Zeigen Sie, dass es in G einen Knoten z gibt, der zu allen anderen Knoten einen Abstand von höchstens zwei hat, d.h. man kann jeden anderen Knoten über höchstens einen Zwischenknoten erreichen.

Hinweis: Benutzen Sie Induktion.

Aufgabe 3

Entscheiden Sie für folgende Mengen, ob sie abzählbar oder überabzählbar viele Elemente enthalten und beweisen Sie Ihre Aussage!

1. Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$,
2. Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$,
3. Menge der rationalen Zahlen (Brüche) $\mathbb{Q}$,
4. Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$,
5. Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$,
6. Menge der ganzzahligen dreidimensionalen Koordinaten $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
7. Potenzmenge der natürlichen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ bzw. $2^{\mathbb{N}}$,
8. Menge der Polynome über einer Variablen x mit ganzzahligen Koeffizienten.

Aufgabe 4

Entscheiden Sie für die folgenden binären (zweistelligen) Relationen, ob sie *reflexiv*, *irreflexiv*, *transitiv*, *symmetrisch*, *asymmetrisch* und/oder *antisymmetrisch* sind:

1. die Relation, die durch den $<$-Operator auf den natürlichen Zahlen definiert wird,
2. die Relation, die durch den $\geq$-Operator auf den reellen Zahlen definiert wird,
3. die Relation, die durch den AND-Operator auf den Wahrheitswerten definiert wird,
4. die Relation, die durch den OR-Operator auf den Wahrheitswerten definiert wird,
5. die wie folgt definierte Relation auf der Menge der Zahlen $\{1, 2, 3, 4\}$:
   $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (4, 3)\}$.

Konstruieren Sie die transitive Hülle R^+ der letzten Relation!
Konstruieren Sie ebenfalls die reflexive und transitive Hülle R^*!

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Falls R nicht reflexiv ist, dann ist R irreflexiv.
2. Falls R nicht symmetrisch ist, dann ist R asymmetrisch.
3. Falls R nicht symmetrisch ist, dann ist R antisymmetrisch.
4. Falls R asymmetrisch ist, dann ist R irreflexiv.
5. Es gibt eine Relation, die gleichzeitig symmetrisch und antisymmetrisch ist.
6. Es gibt eine Relation, die gleichzeitig symmetrisch und asymmetrisch ist.
7. Es gibt eine Relation, die weder symmetrisch, noch asymmetrisch oder antisymmetrisch ist.

Erläutern Sie den Unterschied zwischen dem Komplement einer binären Relation und der inversen Relation! Welchen von beiden Begriffen kann man auch auf mehrstellige Relationen übertragen? Welche der oben genannten Eigenschaften einer Relation R übertragen sich auf das Komplement $\overline{R}$ bzw. die inverse Relation R^{-1}?

Entscheiden Sie, ob folgende Relationen Äquivalenzrelationen darstellen:

1. die Relation $R(a, b)$, die durch die Kongruenz zweier Zahlen $a \equiv b$ modulo 42 definiert wird,
2. die Relation $R(a, b)$, die durch $a|b$ (a teilt b) definiert wird,
3. die Relation $R(a, b)$, die auf der Feststellung beruht, ob sich zwei Personen a und b kennen,
4. die Relation $R(a, b)$ auf der Menge der Paare gebildet aus Zähler und Nenner $\{(z, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \neq 0\}$, so dass die Relation genau die Gleichheit der Brüche beschreibt.

Beweisen Sie, dass jede Äquivalenzrelation die ihr zugrundeliegende Menge in disjunkte Äquivalenzklassen partitioniert!