Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Moritz Maaß und Hanjo Täubig

Sommersemester 2005
Übungsblatt 9
17.06.2005

Informatik IV

Abgabetermin: 24.06.2005 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, y) = (2x + 1)2^y$ eine bijektive primitiv rekursive Abbildung von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ auf $\mathbb{N}$ darstellt. Finden Sie die Inverse von $f(x, y)$, als $(x, y) = f^{-1}(z)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die von LOOP-Programmen berechneten Funktionen primitiv rekursiv sind (Satz 133). Erweitern Sie den Beweis um μ-Rekursion und While-Schleifen, um zu zeigen, dass die von WHILE-Programmen berechneten Funktionen μ-rekursiv sind.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Die Funktion $\exp(n, m) := n^m$ ist LOOP-berechenbar ($n, m \in \mathbb{N}$).

(b) Ist die Funktion $f(n,m) := 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^m}}}}}$ ($n+1$ Zweier) primitiv rekursiv? (Beachte: $2^{2^{2^2}}$ soll als Turm, also $2^{(2^{(2^2)})}$ gelesen werden.)

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Sprache

$$H_s := \{w \in \{0,1\}^* \ : \ M_w \text{ hält bei Eingabe } w\}$$

nicht entscheidbar ist (spezielles Halteproblem). Hierbei bezeichnet M_w die Turing-Maschine, die durch w codiert wird.
Zeigen Sie, dass die Sprachen

a) $L_l := \{w \ : \ M_w \text{ hält bei leerem Band}\}$ und

b) $L_c := \{w \ : \ M_w \text{ berechnet die Identität (d.h. Ausgabe=Eingabe)}\}$

ebenfalls nicht entscheidbar sind.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Ackermann-Funktion:

1. $a(1, y) = y + 2$, $a(2, y) = 2y + 3$ für alle y
2. $y < a(x, y) \qquad \forall x, y$
3. $a(x, y) < a(x, y + 1) \qquad \forall x, y$
4. $a(x, y + 1) \leq a(x + 1, y) \qquad \forall x, y$
5. $a(x, y) < a(x + 1, y) \qquad \forall x, y$