Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Christian Scheideler
Stefan Eckhardt

Wintersemester 2005/06
Übungsblatt 3
5. November 2005

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

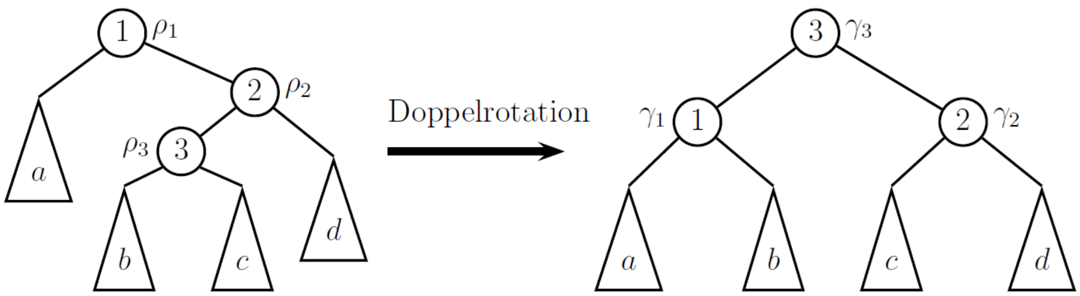
Abgabetermin: 11.11.2004 **vor** *der Zentralübung*

Aufgabe 1 (10 Punkte)

In gewichtsbalancierten Binärbäumen ist das Gewicht $\rho(v)$ eines inneren Knotens v definiert als

$$\rho(v) = \frac{|T_l(v)|}{|T(v)|} = 1 - \frac{|T_r(v)|}{|T(v)|}.$$

Hierbei bezeichen $T(v)$ den Unterbaum mit Wurzel v, $T_l(v)$ bzw. $T_r(v)$ den linken bzw. rechten Unterbaum von v und $|T|$ die Anzahl der Blätter in einem Baum T. Nach einer Doppelrotation in einem Binärbaum können die neuen Gewichte γ_i aus den alten Gewichten ρ_i berechnet werden (i bezeichne hierbei den Knotenindex, siehe nachfolgende Abbildung).



Geben Sie einen formalen Beweis für die Richtigkeit der folgenden drei Gleichungen an:

1. $\gamma_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + (1-\rho_1)\rho_2\rho_3}$
2. $\gamma_2 = \frac{\rho_2(1-\rho_3)}{1-\rho_2\rho_3}$
3. $\gamma_3 = \rho_1 + (1-\rho_1)\rho_2\rho_3$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

In der Vorlesung wurden rot-schwarz-Bäume als externe Suchbäume definiert, d.h. die gespeicherten Schlüssel sind nur in den Blättern abgelegt. Beschreiben Sie für diese Art der Realisierung die DELETE Operation.

Hinweis: Wird die Beschreibung mittels eines Programms in Pseudo-Code angegeben, ist dieses entsprechend zu kommentieren. Programme ohne Kommentar werden nicht akzeptiert.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei ein Baum mit n Knoten. Der „lowest common ancestor"(LCA) zweier Knoten u und v ist definiert als der Knoten w mit der größten Tiefe, der sowohl Vorfahre von u als auch von v ist, d.h. kein Kind von w ist Vorfahre von u und von v.
Beschreiben Sie einen möglichst effzienten Algorithmus, der den LCA für zwei beliebige Knoten berechnet. Wie ist die Laufzeit Ihres Algorithmus?
Hinweis: Wird die Beschreibung mittels eines Programms in Pseudo-Code angegeben, ist dieses entsprechend zu kommentieren. Programme ohne Kommentar werden nicht akzeptiert.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Ein AVL-Baum soll durch einen externen Suchbaum realisiert werden, d.h. die Schlüssel werden *nur* an den Blättern gespeicherten. Geben Sie für diese Art der Realisierung die INSERT Operation an. Sollte der Schlüssel bereits im Baum gespeichert sein, so soll dieser nicht verändert werden.
Hinweis: Wird die Beschreibung mittels eines Programms in Pseudo-Code angegeben, ist dieses entsprechend zu kommentieren. Programme ohne Kommentar werden nicht akzeptiert.