Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Christian Scheideler
Stefan Eckhardt

Wintersemester 2005/06
Übungsblatt 9
28. Januar 2006

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

Abgabetermin: 27.01.2006 **vor** *der Zentralübung*

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Boruvka(G)
$E(T) := \{\}$
WHILE $|V(G)| > 1$ **DO**
  FOR $v \in V(G)$ **DO**
    Sei $e = \{v, u\}$ die leichteste zu v adjazente Kante in $E(G)$
    $E(T) := E(T) \cup \{\{v, u\}\}$
    $G := Ge$
  Entferne alle Schleifen in G.
  ENDFOR
  Für alle Paare von Knoten $u, v \in V(G)$ und Mengen E_{uv} von
  Mehrfachkanten zwischen u und v setze $E(G) = E(G) \setminus E_{uv} \cup e$,
  wobei $e = \{u, v\}$ und $w(e) = \min_{f \in E_{u,v}} w(f)$ gelten.
ENDWHILE
RETURN $T := (V, E(T))$

Zeigen Sie, dass der Algorithmus im schlechtesten Fall $\Omega(|E| \log |V|)$ Schritte benötigt, um den minimalen Spannbaum eines Graphen zu berechnen.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussage: Ein Graph $G = (V, E)$ hat einen eindeutigen MST T, d.h. $w(T) < w(T')$ für alle Spannbäume T', falls für jeden Cut $C = (V_1, V_2)$ von V eine eindeutige gewichtsminimale Kante $e \in E_C$ existiert, d.h. $w(e) < w(e')$ für alle $e' \in E_C$, wobei E_C die Menge der Kanten über den Schnitt ist. Zeigen Sie außerdem, dass das logische Gegenteil der Aussage falsch ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei T ein MST von G und $L = w_1, ...w_{n-1}$ die sortierte Liste der Kantengewichte von T. Zeigen sie, dass L für jeden anderen MST T' von G ebenfalls die sortierte Liste der Kantengewichte ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, T ein MST von G und $V' \subseteq V$ eine Teilmenge der Knotenmenge. Sei T' der Teilgraph von T, der durch die Menge V' induziert wird und G' der Teilgraph von G, der durch V' induziert wird. Zeigen Sie, dass T' ein MST von G' ist, falls T' zusammenhängend ist.