4 Lineare Optimierung

In diesem Kapitel werden wir uns mit effizienten Verfahren im Bereich der linearen Optimierung beschäftigen.

4.1 Einführung

Als Einführung betrachten wir das Beispiel einer Erdölraffinerie. Es gibt zwei Crackprozesse, um schweres Öl (S), mittelschweres Öl (M) und leichtes Öl (L) zu produzieren (GE = Grundeinheit, ME = Mengeneinheit).

- Crackprozess 1: Kosten: 3 GE, S: 2 ME, M: 2 ME, L: 1 ME
- Crackprozess 2: Kosten: 5 GE, S: 1 ME, M: 2 ME, L: 4 ME

Die Mindestproduktion sei

3 ME S, 5 ME M, 4 ME L

Um die kostengünstigste Kombination der Crackprozesse zu ermitteln, die die Mindestproduktion sicherstellt, führen wir zwei Variablen ein:

- x_1: Produktionsniveau von Crackprozess 1, $x_1 \geq 0$
- x_2: Produktionsniveau von Crackprocess 2, $x_2 \geq 0$

Für den Ausstoß gilt dann

- $2x_1 + x_2$ ME S ≥ 3 ME
- $2x_1 + 2x_2$ ME M ≥ 5 ME
- $x_1 + 4x_2$ ME L ≥ 4 ME

und die Gesamtkosten sind $z = 3x_1 + 5x_2$. Das lineare Optimierungsproblem dazu sieht dann wie folgt aus:

$$\min 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 2x_1 + x_2 & \geq & 3 \\
(2) & 2x_1 + x_2 & \geq & 5 \\
(3) & x_1 + 4x_2 & \geq & 4 \\
(4) & x_1 & \geq & 0 \\
(5) & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Eine geometrische Interpretation des Optimierungsproblems ist in Abb. 1 zu finden. Für die optimale Lösung gilt:

$$x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{Wert} = 8,5$$

Für eine Zielfunktion $ax_1 + bx_2$ mit $a < 0$ gibt es keine Lösung, da x_1 beliebig groß und damit der Zielfunktionswert beliebig klein gewählt werden könnte.

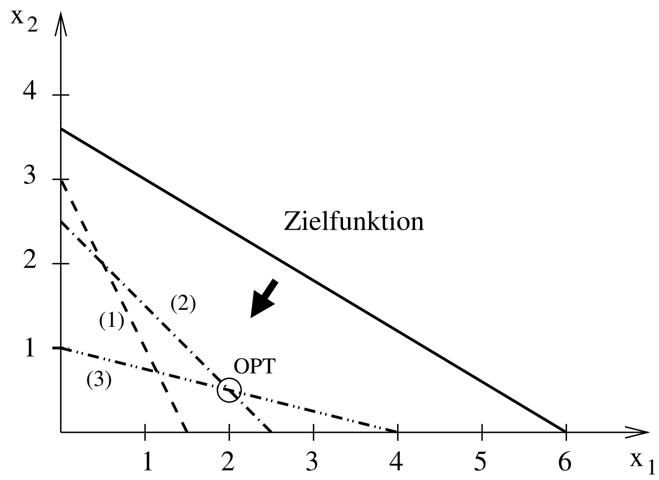

Figure 1: Geometrische Interpretation des Raffinerieproblems.

Abb. 1 legt folgende Vermutung nahe: Wenn eine Optimallösung existiert, dann existiert eine, die für n Variablen im Schnitt von n Hyperebenen liegt (in unserem Beispiel im Schnitt zweier Geraden). Diese Vermutung wird später noch präzisiert und bewiesen. Unter der Annahme, dass diese wahr ist, können wir die folgende naive Lösungsmethode verwenden:

Schreibe (1) bis (5) als Gleichungen und löse alle $\binom{5}{2} = 10$ Gleichungssysteme mit 2 der Gleichungen. Von den Lösungen, die zulässig sind, ist die mit dem kleinsten Zielfunktionswert die optimale.

Angenommen, wir haben n Variablen und m Gleichungen, $m \geq n$. Dann müssten wir $\binom{m}{n}$ Gleichungssysteme lösen, was natürlich eindeutig zuviel ist. Eine bessere Methode ist die Simplexmethode, die wie folgt arbeitet:

1. Finde eine zulässige Lösung (im Schnitt von n Hyperebenen).
2. Gehe durch Austausch je einer Hyperebene zu einer benachbarten Lösung, deren Zielfunktionswert nicht schlechter ist.
3. Wiederhole (2), bis eine optimale Lösung gefunden wurde.

Wir werden später sehen, dass die Optimalität der gefundenen Lösung durch die Dualitätstheorie sichergestellt ist. Zunächst werden wir per Hand zeigen, dass $x^* = \binom{2}{1/2}$ eine optimale Lösung ist. Dazu machen wir die folgenden Beobachtungen für eine zulässige Lösung x.

- 1. Beobachtung: Erfüllt x eine Ungleichung, dann auch eine beliebige Skalierung dieser Ungleichung, d.h. in unserem Beispiel gilt

$$(2') \quad 4x_1 + 4x_2 \geq 10 \quad \text{(skalieren von (2) um Faktor 2)}$$

- 2. Beobachtung: Erfüllt x zwei gleichgerichtete Ungleichungen, so erfüllt er auch deren Summe.

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2x_1 + x_2 & \geq & 3 \\ (3) & x_1 + 4x_2 & \geq & 4 \\ \hline & 3x_1 + 5x_2 & \geq & 7 \end{array}$$

Wir erhalten damit also eine untere Schranke für die Optimallösung (siehe die Zielfunktion).

- 2. Versuch:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2x_1 + x_2 & \geq & 3 \\ (2) & 2x_1 + 2x_2 & \geq & 5 \\ \hline & 4x_1 + 3x_2 & \geq & 8 \end{array}$$

Das kann nicht zur Abschätzung der Zielfunktion $(3x_1 + 5x_2)$ verwendet werden.

- 3. Versuch:

$$\begin{array}{lrcl} 1,5 \cdot (2) & 3x_1 + 3x_2 & \geq & 7{,}5 \\ \Rightarrow_{x \geq 0} & 3x_1 + 5x_2 & \geq & 7{,}5 \end{array}$$

Das ergibt eine etwas bessere untere Schranke, aber noch nicht den Optimalwert.

Um eine systematische Suche der Multiplikatoren durchzuführen, führen wir y_1 für (1) ein, y_2 für (2) ein, und y_3 für (3) ein. Dann können wir die Suche nach einer unteren Schranke formulieren als

$$\begin{array}{lrcll} & \max 3y_1 + 5y_2 + 4y_3 & & & \text{(Koeff. rechts von (1)-(3) oben für untere Schranke)} \\ (1) & 2y_1 + 2y_2 + y_3 & \leq & 3 & ((1) \cdot y_1 + (2) \cdot y_2 + (3) \cdot y_3 \leq 3 \text{ bzgl. } x_1) \\ (2) & y_1 + 2y_2 + 4y_3 & \leq & 5 & ((1) \cdot y_1 + (2) \cdot y_2 + (3) \cdot y_3 \leq 5 \text{ bzgl. } x_2) \\ (3) & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

Wir betrachten nun die Optimallösung $y^* = (y_1^*\ y_2^*\ y_3^*)^T = (0,\ 7/6,\ 2/3)$. Für diese gilt

$$\begin{array}{lrcl} 7/6 \cdot (2): & (14/6)x_1 + (14/6)x_2 & \geq & 35/6 \\ 4/6 \cdot (3): & (4/6)x_1 + (16/6)x_2 & \geq & 16/6 \\ \hline & 3x_1 + 5x_2 & \geq & 8{,}5 \end{array}$$

x^* ist also tatsächlich eine Optimallösung, da für jede gültige Lösung gelten muss, dass $3x_1+5x_2 \geq 8,5$. Für unsere Methode können wir den folgenden Satz zeigen.

Satz 4.1 (Schwacher Dualitätssatz) *Es seien $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und A eine reelle (m,n)-Matrix. Für die Probleme*

- *(P)* $\min\{c^T x \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\}$
- *(D)* $\max\{y^T b \mid y^T A \leq c^T,\ y \geq 0\}$

gilt folgende Aussage:
Seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $y_0 \in \mathbb{R}^m$ Vektoren mit $Ax_0 \geq b$, $x_0 \geq 0$ und $y_0^T A \leq c^T$, $y_0 \geq 0$, dann ist

$$y_0^T b \leq c^T x_0$$

Beweis.

$$y_0^T b \leq y_0^T (A x_0) = (y_0^T A) x_0 \leq c^T x_0$$

□

Der starke Dualitätssatz besagt, dass $(y^*)^T b = c^T x^*$ für die Optimallösungen x^* und y^* ist, wie wir noch später sehen werden.

Es gibt auch eine ökonomische Interpretation des dualen Programms. Betrachten wir die folgende Frage: Bei welchen Marktpreisen lohnt sich die Eigenproduktion gerade noch? Sei y_1 (bzw. y_2, y_3) der Marktpreis von S (bzw. M, L). Dann sind:

- max $3y_1 + 5y_2 + 4y_3$: maximale Bezahlung, ohne selbst zu produzieren.
- $2y_1 + 2y_2 + y_3$: Kosten für Ausstoß von CP 1
  > 3: Produktion lohnt sich
- $y_1 + 2y_2 + 4y_3$: Kosten für Ausstoß von CP 2
  > 5: Produktion lohnt sich

y_1, y_2 und y_3 heißen auch Schattenpreise.

4.2 Optimierungsprobleme

Bevor wir mit der Formalisierung unseres algorithmischen Ansatzes weiter voranschreiten, formalisieren wir zunächst den Begriff der linearen Optimierungsprobleme und anderer wichtiger Klassen von Optimierungsproblemen.

Im allgemeinsten Fall lässt sich ein Optimierungsproblem wie folgt beschreiben. Gegeben:

- Menge S
- georNete Teilmenge $(T, \leq)$ (d.h. zwischen je zwei Elementen $s, t \in T$ gilt genau eine der folgenden Beziehungen: $s < t$, $s = t$, oder $s > t$)
- Abbildung $f : S \to T$

Gesucht:

- Maximierungsproblem: $x^* \in S$, so dass $f(x^*) \geq f(x)$ für alle $x \in S$
- Minimierungsproblem: $x^* \in S$, so dass $f(x^*) \leq f(x)$ für alle $x \in S$

Schreibweise:

- $\max_{x \in S} f(x)$ für $\max\{f(x) \mid x \in S\}$
- $\min_{x \in S} f(x)$ für $\min\{f(x) \mid x \in S\}$

Definition 4.2 (Nichtlineares Optimierungsproblem) *Es seien f, g_i ($i \in \{1, \ldots, m\}$) und h_j ($j \in \{1, \ldots, p\}$) differenzierbare (oder zumindest stetige) Funktionen von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann heißt*

$$
\textit{min } f(x) \textit{ s.d.} \quad \begin{array}{ll} g_i(x) \le 0 & \textit{für } i = 1, \ldots, m \\ h_j(x) = 0 & \textit{für } j = 1, \ldots, p \\ x \in \mathbb{R}^n & \end{array}
$$

nichtlineares Optimierungsproblem.

Eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls gilt: Sind $x, y \in S$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \le \lambda \le 1$, dann ist auch $\lambda x + (1-\lambda) y \in S$. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls für alle $\lambda \in R$, $0 \le \lambda \le 1$, und alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$
\lambda \cdot f(x) + (1-\lambda) f(y) \ge f(\lambda x + (1-\lambda) y)
$$

Beispiele konvexer Mengen und Funktionen finden sich in Abb. 2.

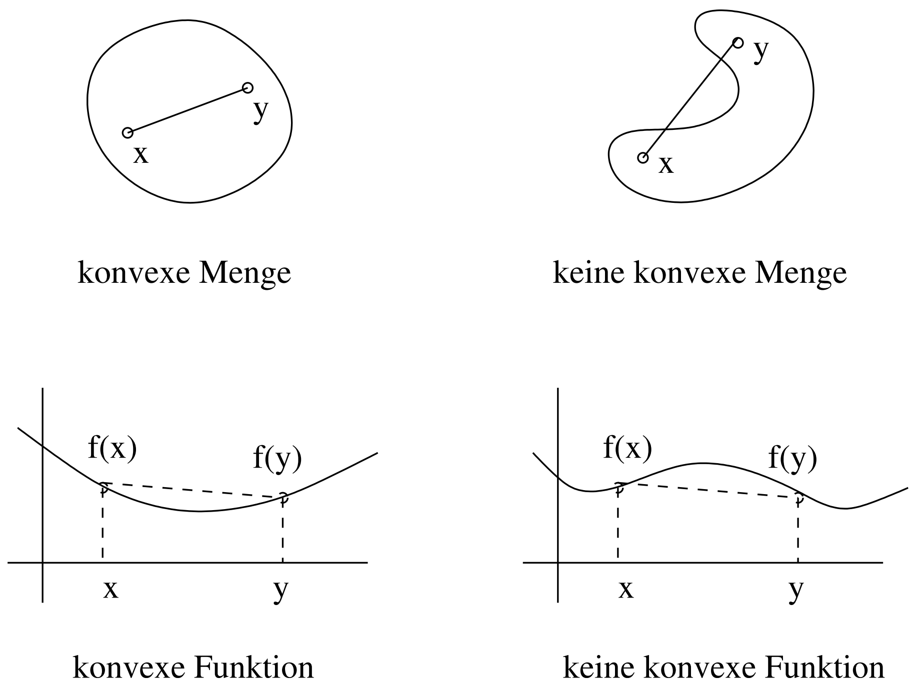

Figure 2: Konvexe und nichtkonvexe Mengen und Funktionen.

Definition 4.3 (Konvexes Optimierungsproblem) *Ist $S \in \mathbb{R}^n$ konvex und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, dann heißt $\min_{x \in S} f(x)$ ein* konvexes Optimierungsproblem.

Eine konvexe Menge S kann z.B. definiert sein durch $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, wobei die g_i, $i = 1, \ldots, m$, konvexe Funktionen sind.

Definition 4.4 (Lineares Optimierungsproblem) *Gegeben seien $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dann heißt*

$$
\textit{max } c^T x \textit{ s.d.} \quad \begin{array}{r} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{array}
$$

lineares Optimierungsproblem

Definition 4.5 (Lineares Optimierungsproblem) *Gegeben seien $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dann heißt*

$$\begin{aligned} \textit{max } c^T x \textit{ s.d.} \quad Ax &\le b \\ x &\ge 0 \quad \textit{ganzzahlig} \end{aligned}$$

lineares ganzzahliges Optimierungsproblem

Definition 4.4 scheint recht eingeschränkt zu sein, denn neben Maximierungsproblemen könnten auch Minimierungsprobleme, statt Ungleichungen auch Gleichungen in den Restriktionen, und statt der Forderung $x \ge 0$ auch beliebige reelle Variablen betrachtet werden. Die folgenden Transformationen zeigen aber, dass die Form in Definition 4.4 aber eine Normalform für alle Optimierungsprobleme über linearen Zielfunktionen und Restriktionen ist.

1. Umformung von Minimierungsproblem in Maximierungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{min } c^T x \text{ s.d.} \quad Ax &\ge b \\ x &\ge 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \text{max } -c^T x \text{ s.d.} \quad -Ax &\le -b \\ x &\ge 0 \end{aligned}$$

2. Umformung von Gleichungen in Restriktionen:

$$\begin{aligned} \text{max } c^T y \text{ s.d.} \quad By &\ge d \\ y &\ge 0 \end{aligned} \qquad \overset{x=y}{\Rightarrow} \qquad \begin{aligned} \text{max } c^T x \text{ s.d.} \quad \binom{B}{-B} x &\le \binom{d}{-d} \\ x &\ge 0 \end{aligned}$$

3. Umformung von reellwertigen in nichtnegative Variablen:

$$\begin{aligned} \text{max } a^T y \text{ s.d.} \quad By &\ge d \\ y &\in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad \overset{x=\binom{y^+}{y^-}}{\Rightarrow} \qquad \begin{aligned} \text{max } \binom{a}{-a}^T x \text{ s.d.} \quad (B, -B)x &\le d \\ x &\ge 0 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun ein paar Beispiele für lineare Optimierungsprobleme, denen wir schon im ersten Kapitel über maximale Flüsse begegnet sind.

Maxflow Problem

Gegeben seien ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c : E \to \mathbb{R}^+$ und das Quell-Ziel-Paar (s, t) in G. Für jede Kante $e \in E$ sei $x_e \ge 0$ der Flusswert entlang e. Dann ist das Maxflow Problem wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lll} & \max \sum_{(s,w)\in E} x_{(s,w)} - \sum_{(u,s)\in E} x_{(u,s)} & \text{Flusswert} = \text{Fluss aus } s \\ \text{s.d.} & \sum_{(u,v)\in E} x_{(u,v)} - \sum_{(v,w)\in E} x_{(v,w)} = 0 \text{ für alle } v \in V \setminus \{s,t\} & \text{Flusserhaltung} \\ & x_e \le c(e) \text{ für alle } e \in E & \text{Kapazitätseinhaltung} \\ & x_e \ge 0 \text{ für alle } e \in E & \end{array}$$

Mincost Maxflow Problem

Gegeben ist hier ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c : E \to \mathbb{R}^+$ und Kantenkosten $w : E \to \mathbb{R}^+$ und das Quell-Ziel-Paar (s, t) in G. Wir erinnern uns daran, dass die Kosten eines Flusses f definiert sind als

$$w(f) = \sum_{e \in E} w(e) \cdot f(e)$$

Um den maximalen Fluss mit minimalen Kosten zu finden, lösen wir zunächst das Maxflow Problem oben, um den maximalen Zielfunktionswert f^* zu erhalten. Mit Hilfe dieses Wertes stellen wir dann das folgende lineare Optimierungsproblem auf, das uns den maximalen Fluss mit minimalen Kosten liefert.

$$\begin{array}{lll}
 & \min \sum_{e \in E} w(e) \cdot f(e) & \\
\text{s.d.} & \sum_{(s,w) \in E} x_{(s,w)} - \sum_{(u,s) \in E} x_{(u,s)} = f^* & \text{Flusswert maximal} \\
 & \sum_{(u,v) \in E} x_{(u,v)} - \sum_{(v,w) \in E} x_{(v,w)} = 0 \text{ für alle } v \in V \setminus \{s, t\} & \text{Flusserhaltung} \\
 & x_e \leq c(e) \text{ für alle } e \in E & \text{Kapazitätseinhaltung} \\
 & x_e \geq 0 \text{ für alle } e \in E &
\end{array}$$

4.3 Die Simplexmethode

Im folgenden bezeichne I die Einheitsmatrix (d.h. die Matrix mit 1en entlang der Diagonalen und sonst 0en überall). Seien $a \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^m$ und $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Wir betrachten die folgenden äquivalenten Umformungen:

$$\max a^T y \text{ s.d. } \begin{array}{r} Dy \geq d \\ y \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \max a^T y \text{ s.d. } \begin{array}{r} Dy + Is = d \\ y, s \geq 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \max a^T y \text{ s.d. } \begin{array}{r} s = d - Dy \\ y, s \geq 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \max z \text{ s.d. } \begin{array}{r} s = d - Dy \\ z = a^T y \\ y, s \geq 0 \end{array}$$

Variablen in y heißen Entscheidungsvariablen und die Variablen in s heißen Schlupfvariablen. Betrachten wir wieder unser Beispiel mit der Erdölraffinerie. Für das duale Optimierungsproblem galt:

$$\begin{array}{rcl}
\max 3y_1 + 5y_2 + 4y_3 & & \\
2y_1 + 2y_2 + y_3 & \leq & 3 \\
y_1 + 2y_2 + 4y_3 & \leq & 5 \\
y_1, y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Transformieren wir dieses in das System oben, so erhalten wir für $(x_1, \ldots, x_5) = (y_1, y_2, y_3, s_1, s_2)$ die Restriktionen

$$\begin{array}{llcl}
(1) & x_4 & = & 3 - 2x_1 - 2x_2 - x_3 \\
(2) & x_5 & = & 5 - x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\
(3) & z & = & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
 & & & x_1, \ldots, x_5 \geq 0
\end{array}$$

x_1, x_2, x_3 werden Nichtbasisvariablen und x_4, x_5 Basisvariablen dieses Systems genannt. Eine erste Lösung für das Gleichungssystem oben kann man erhalten für $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$. Das ergibt aber lediglich $z = 0$, was noch weit vom optimalen Zielfunktionswert $z = 8,5$ entfernt ist. Um z zu erhöhen, können wir entweder x_1, x_2 oder x_3 erhöhen, da all diese Variablen positive Koeffizienten in der Gleichung für z haben. Erhöhen wir z.B. x_1 und lassen $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$. Dann erhalten wir $z = 3x_1 > 0$ und weiterhin gilt

$$\begin{array}{lcr}
x_4 \geq 0 & \Rightarrow & x_1 \leq 3/2 \\
x_5 \geq 0 & \Rightarrow & x_1 \leq 5
\end{array}$$

Wir können als x_1 bis auf $3/2$ erhöhen, ohne in eine ungültige Lösung zu geraten. Führen wir einen Basistausch zwischen x_1 und x_4 durch, so ergibt aus dem System oben das System

$$\begin{array}{llcl}
(1') & x_1 & = & (3/2) - x_2 - (1/2)x_3 - (1/2)x_4 \\
(2') & x_5 & = & 5 - ((3/2) - x_2 - (1/2)x_3 - (1/2)x_4) - 2x_2 - 4x_3 \\
 & & = & (7/2) - x_2 - (7/2)x_3 + (1/2)x_4 \\
(3') & z & = & 3((3/2) - x_2 - (1/2)x_3 - (1/2)x_4) + 5x_2 + 4x_3 \\
 & & = & (9/2) + 2x_2 + (5/2)x_3 - (3/2)x_4
\end{array}$$

Für $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ erhalten wir also $z = 9/2$, was besser ist als vorher. Als nächstes können wir entweder x_2 oder x_3 erhöhen, da beide positive Koeffizienten in der z-Gleichung haben. Angenommen, wir wollen x_2 erhöhen. Dann gilt:

$$\begin{array}{llcl}
(1') & x_1 \geq 0 & \Rightarrow & x_2 \leq 3/2 \\
(2') & x_5 \geq 0 & \Rightarrow & x_2 \leq 7/2
\end{array}$$

Wir führen also einen Basistausch von x_1 und x_2 durch. Daraus ergibt sich

$$\begin{array}{llcl}
(1'') & x_2 & = & (3/2) - x_1 - (1/2)x_3 - (1/2)x_4 \\
(2'') & x_5 & = & 2 + x_1 - 3x_3 + x_4 \\
(3'') & z & = & (15/2) - 2x_1 + (3/2)x_3 - (5/2)x_4
\end{array}$$

Als nächstes können wir einen Basistausch von x_3 und x_5 vornehmen. Das ergibt

$$\begin{array}{llcl}
(1''') & x_2 & = & (7/6) - (7/6)x_1 - (2/3)x_4 + (1/6)x_5 \\
(2''') & x_3 & = & (2/3) + (1/3)x_1 + (1/3)x_4 - (1/3)x_5 \\
(3''') & z & = & (17/2) - (3/2)x_1 - 2x_4 - (1/2)x_5
\end{array}$$

Da z nicht weiter zu erhöhen ist, erreichen wir also für $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_5 = 0$ eine optimale Lösung mit $x_2 = 7/6$ und $x_3 = 2/3$.

Die Regel, die wir zum Basistausch oben verwendet haben, nennt sich auch “kleinste Indexregel”. Eine andere Regel ist z.B. der “steilste Einheitsanstieg”. Für diese Regel würde in der ersten Iteration ein Basistausch von x_2 und x_4 durchgeführt werden. Daraus ergäbe sich

$$\begin{array}{lrcl}
(1'a) & x_2 & = & (3/2) - x_1 - (1/2)x_3 - (1/2)x_4 \\
(2'a) & x_3 & = & 2 + x_1 - 3x_2 + x_4 \\
(3'a) & z & = & (15/2) - 2x_1 + (3/2)x_3 - (5/2)x_4
\end{array}$$

Die Optimalität würde dann in zwei weiteren Iterationen erreicht.

Aus unseren Erfahrungen oben können wir die folgenden Regeln formulieren:

- **Eintrittsvariable**: Variable mit positivem Koeffizienten in z-Gleichung

  $$z = z^* + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j$$

  wobei z^* den momentanen Zielfunktionswert und $\bar{c}_j$ den momentanen Koeffizienten für Nichtbasisvariable x_j angibt.

- **Austrittsvariable**: Die Basisvariable, deren Nichtnegativität die kleinste obere Schranke für die Eintrittsvariable impliziert.

Gibt es keine solche Variable, z.B.

$$\begin{array}{rcl}
x_4 & = & 5 + 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\
x_5 & = & 7 - 3x_2 - 4x_3 \\
z & = & x_1 - x_2 - x_3
\end{array}$$

bei Eintrittsvariable x_1, dann ist das LP unbeschränkt. Ein Beispiel für einen System mit mehreren Kandidaten für die Austrittsvariable ist

$$\begin{array}{rcl}
x_4 & = & 1 \\
x_5 & = & 3 - 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 \\
x_6 & = & 2 + x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\
z & = & 2x_1 - x_2 + 8x_3
\end{array}$$

mit Eintrittsvariable x_3, da für x_5 und x_6 gilt, dass $x_3 \leq 1/2$. Einen anderen interessanten Fall erhält man, wenn man x_3 und x_4 mit der Forderung $x_3 \leq (1/2) - (1/2)x_4$ austauscht. Das ergibt

$$\begin{array}{rcl}
x_3 & = & (1/2) - (1/2)x_4 \\
x_5 & = & 0 - 2x_1 + 4x_2 + 3x_4 \\
x_6 & = & 0 - x_1 - 3x_2 + 2x_4 \\
z & = & 4 + 2x_1 - x_2 - 4x_4
\end{array}$$

Für die Eintrittsvariable x_1 folgt sich für x_5 und x_6, dass $x_1 \leq 0$ sein muss. In diesem Fall spricht man von einer *Degenerität* oder einem *degenerierten Pivot*. Der Basistausch von x_1 und x_5 ergibt

$$\begin{array}{rcl}
x_1 & = & 0 + 2x_2 + (3/2)x_4 - (1/2)x_5 \\
x_3 & = & (1/2) - (1/2)x_4 \\
x_6 & = & 0 - x_2 + (7/2)x_4 - (1/2)x_5 \\
z & = & 4 + 3x_2 - x_4 - x_5
\end{array}$$

Ein weiterer Basistausch mit x_2 führt dann zur Optimallösung.

Da sich bei degenerierten Pivots der Simplexalgorithmus nicht verbessert, stellt sich die Frage, ob der Simplexalgorithmus immer terminiert. In der Tat terminiert er nicht für jede Simplexregel. Betrachte z.B.

$$
\begin{array}{rcl}
x_5 & = & 0 - (1/2)x_1 + (11/2)x_2 + (5/2)x_3 - 9x_4 \\
x_6 & = & 0 - (1/2)x_1 + (3/2)x_2 + (1/2)x_3 - x_4 \\
x_7 & = & 1 - x_1 \\
z & = & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4
\end{array}
$$

und die Regel

1. Eintrittsvariable: Kandidatin mit größtem Koeffizienten.

2. Austrittsvariable: Kandidatin mit kleinstem Index.

Es folgen sechs degenerierte Pivots, nach denen wir wieder wie am Anfang sind. Eine Hausaufgabe wird sein, diese Rechnungen nachzuvollziehen.

Glücklicherweise gibt es eine Pivotregel, die immer terminiert, die auch als *Bland's Regel* bekannt ist: Als Basiseintritts- und Austrittsvariable wird immer die Kandidatin mit dem kleinsten Index gewählt. Einen Beweis dazu geben wir später.

Zunächst formalisieren wir den Simplexalgorithmus weiter. Wir betrachten LPs der Form

$$
\begin{array}{rl}
 & \max c^T x \\
\text{s.d.} & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$
- $rang(A) = m$
- $P^=(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$

Diese Eigenschaften galten oben mit $A = (D, I)$, $c = \binom{a}{0}$ und $b = d$. Konventionen für A sind:

- Zeilenindexmenge von A: $\{1, 2, \ldots, m\}$
- Spaltenindexmenge von A: $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Basis: $B = (p_1, p_2, \ldots, p_m)^T \in \{1, 2, \ldots, n\}^m$
- Nichtbasis: $N = (q_1, q_2, \ldots, q_{n-m})^T \in \{1, 2, \ldots, n\}^{n-m}$
- B, N Vektoren oder Mengen, abhängig von der Situation.
- $B \cup N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $B \cap N = \emptyset$

Für ein $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ sei $A_{\bullet J}$ die Untermatrix von A nach Streichen der Spalten in $\{1, \ldots, n\} \setminus J$, und für $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ sei $A_{I \bullet}$ die Untermatrix von A nach Streichen der Zeilen in $\{1, \ldots, m\} \setminus I$. Für den Spezialfall $|J| = 1$, d.h. $J = \{j\}$, schreiben wir auch $A_{\bullet j}$ anstatt $A_{\bullet \{j\}}$, und für $|I| = 1$, d.h. $I = \{i\}$, schreiben wir auch $A_{i \bullet}$ anstatt $A_{\{i\} \bullet}$. Zur weiteren Vereinfachung werden wir A_B statt $A_{\bullet B}$ und A_N statt $A_{\bullet N}$ schreiben.

Definition 4.6 *Gegeben sei ein Gleichungssystem $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $rang(A) = m$, außerdem B und N nach obigen Konventionen.*

(a) *Ist A_B regulär (d.h. invertierbar), so heißt A_B* Basismatrix *(oder kurz* Basis*) und B* Basisindexvektor *(oder kurz* Basis*) und A_N* Nichtbasismatrix *(*Nichtbasis*) und N* Nichtbasisindexvektor *(*Nichtbasis*). Der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_N = 0$ und $x_B = A_B^{-1}b$ heißt* Basislösung *von $Ax = b$ zur Basis A_B.*

(b) *Ist A_B eine Basis, dann heißen die Variablen x_j, $j \in B$,* Basisvariablen *und x_j, $j \in N$, Nichtbasisvariablen.*

(c) *Ist A_B eine Basis und gilt $A_B^{-1}b \geq 0$, dann heißen A_B und die dazugehörige Basislösung x* zulässig *(andernfalls* unzulässig*).*

(d) *Eine Basislösung x zur Basis A_B heißt* nichtdegeneriert*, falls $(x_B)_i = (A_B^{-1}b)_i \neq 0$ für alle $i \in B$, und sonst* degeneriert.

Warum sind Basislösungen so wichtig für den Simplexalgorithmus? Erinnern wir uns daran, dass wir am Anfang des Kapitels vermutet haben, dass wenn eine Optimallösung existiert, dann existiert eine, die für n Variablen im Schnitt von n Hyperebenen liegt. Der Simplexalgorithmus exploriert diese Lösungen, indem er sich von Basislösung zu Basislösung bewegt. Eine zulässige Basislösung kann man sich vorstellen als eine Ecke des n-dimensionalen Polyeders, der durch die Restriktionen definiert ist. Der Simplexalgorithmus wandert also durch einen Basistausch entlang der Ecken dieses Polyeders, wobei er nur Basistausche betrachtet, die zu einer benachbarten Ecke führen, die einen mindestens so guten Zielfunktionswert wie die vorherige Ecke hat.

Nun mag man sich fragen, ob die Menge der Basislösungen alle relevanten Ecken abdeckt, da ja immer n der $n + m$ Variablen (die Nichtbasisvariablen) auf 0 gesetzt sind. Das ist in der Tat der Fall, wie wir noch sehen werden.

Satz 4.7

(a) *Ist x eine nichtdegenerierte Basislösung, dann ist die zu x gehörige Basis eindeutig definiert.*

(b) *Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.*

Beweis. (a) Angenommen, es gibt eine Basis $B' \neq B$ mit $x_{B'} = x_B$. Dann gibt es ein i mit $i \in B$ und $i \notin B'$. In diesem Fall muss aber $x_i = 0$ sein, was zum Widerspruch führt.

(b) Betrachte z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Basen sind $(1, 3)$ und $(2, 3)$ und die dazugehörigen Basislösungen sind $(1, 0, 0)^T$ und $(0, 1, 0)^T$. Beide sind entartet, haben aber eindeutig bestimmte Basen. □

Gründe für Degenerität können sein:

- überflüssige Variable (vermeidbar)
- redundante Ungleichung (vermeidbar)
- geometrische Gründe (nicht unbedingt vermeidbar)

Eine Ungleichung $d^T x \leq d_0$ heißt *redundant* bezüglich $P(A,b)$, wenn gilt: $x \in P(A,b) \;\Rightarrow\; d^T x \leq d_0$. Geometrische Gründe können dann entstehen, wenn es eine Ecke gibt, in der sich mehr als nur n Hyperebenen schneiden (betrachte z.B. die Spitze einer Pyramide im 3-dimensionalen Raum). Ein Basistausch an einer solchen Ecke kann dazu führen, dass der Simplexalgorithmus bei dieser Ecke bleibt.

4.4 Korrektheit

Bisher haben wir den Simplexalgorithmus nur auf einer recht intuitiven Ebene beschrieben. Jetzt formalisieren wir diesen und beweisen seine Korrektheit. Wir betrachten LPs der Form

$$\begin{array}{rr} & \max c^T x \\ \text{s.d.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Aufgeteilt in Basis- und Nichtbasisvariablen erhalten wir

$$\begin{array}{rr} & \max \binom{c_B}{c_N}^T \binom{x_B}{x_N} \\ \text{s.d.} & (A_B, A_N)\binom{x_B}{x_N} = b \\ & \binom{x_B}{x_N} \geq 0 \end{array}$$

Daraus folgt

$$\begin{array}{rcl} A_B x_B + A_N x_N & = & b \\ \Rightarrow \quad x_B & = & A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} z & = & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & = & c_B^T (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N) + c_N^T x_N \\ & = & c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N \end{array}$$

Wir erhalten also das folgende Simplexgleichungsschema (SGS):

$$\begin{array}{rcl} x_B & = & A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \\ z & = & c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N \end{array}$$

Das lässt sich als sogenanntes Simplextableau wie folgt darstellen:

$c_B^T A_B^{-1} b$	$c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T$
$A_B^{-1} b$	$A_B^{-1} A_N$

Für das Raffinerie-Beispiel gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad c^T = (3,5,4,0,0)$$

Das Anfangs-SGS dazu ist

$$\begin{aligned} B &= (4,5) \quad \text{und} \quad N = (1,2,3) \\ A_B^{-1}b &= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ c_N^T - c_B^T A_B^{-1} b &= (3,5,4) - (0,0,0) \end{aligned}$$

Das Tableau sieht also wie folgt aus:

		x_1	x_2	x_3
z	0	-3	-5	-4
x_4	3	2	2	1
x_5	5	1	2	4

Durch den Basistausch von x_2 und x_4 ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} B &= (2,5) \quad \text{und} \quad N = (1,4,3) \\ A_B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \\ A_B^{-1}A_N &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ c_B^T A_B^{-1} b &= (5,0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{15}{2} \\ c_N^T - c_B^T A_B^{-1} b &= (3,0,4) - (5,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (-2, -5/2, 3/2) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} x_2 &= 3/2 - x_1 - (1/2)x_4 - (1/2)x_3 \\ x_5 &= 2 + x_1 + x_4 - 3x_3 \\ z &= 15/2 - 2x_1 - (5/2)x_4 + (3/2)x_3 \end{aligned}$$

oder als Tablueau:

		x_1	x_4	x_3
z	15/2	2	5/2	-3/2
x_2	3/2	1	1/2	1/2
x_5	2	-1	-1	3

Die Komponenten des Vektors $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ heißen auch *reduzierte Kosten*.

Satz 4.8 (Optimalität) *Sei A_B eine zulässige Basis, x die zu A_B gehörige Basislösung und $\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ der zugehörige Vektor der reduzierten Kosten, so gilt:*

(a) Ist $\bar{c} \leq 0$, dann ist x optimal.

(b) Ist x nichtdegeneriert und optimal, so gilt $\bar{c} \leq 0$.

Beweis. Sei $P^{=}(A,b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$.
(a) Sei $y \in P^{=}(A,b)$. Dann gilt

$$c^T y = c_B^T A_B^{-1} b + \bar{c}^T y_N \overset{y_N \geq 0}{\leq} c_B^T A_B^{-1} b = c_B^T x_B = c^T x$$

(b) Sei x optimal, $y \in P^{=}(A,b)$. So gilt:

$$\begin{aligned} c^T x \geq c^T y \quad &\Leftrightarrow \quad c_B^T A_B^{-1} b + \bar{c}^T x_N \geq c_B^T A_B^{-1} b + \bar{c}^T x_N \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \geq \bar{c}^T y_N \end{aligned}$$

Angenommen, es gibt ein $i \in N$ mit $\bar{c}_i > 0$. Aus der Nichtgenerität folgt, dass $A_B^{-1} b > 0$. Es sei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n-m}$ der Vektor mit einer 1 an der i-ten Stelle. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ mit

$$A_B^{-1} b \geq A_B^{-1} A_N \lambda e_i$$

Betrachte nun die Lösung x^λ mit

$$\begin{aligned} x_B^\lambda &= A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N \lambda \cdot e_i \\ x_N^\lambda &= \lambda \cdot e_i \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $x^\lambda \in P^{=}(A,b)$ und wir haben

$$\begin{aligned} c^T x^\lambda &= c_B^T A_B^{-1} b + \bar{c} \lambda e_i = c_T x + \lambda \bar{c}_i \\ &> c^T x \end{aligned}$$

was ein Widerspruch zur Optimalität von x ist. □

Satz 4.9 (Basistausch) *Sei A_B eine Basis mit $B = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $N = (q_1, \dots, q_m)$ und $\bar{A} = A_B^{-1} A_N = (\bar{a}_{rs})_{1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n-m}$ und $\bar{b} = A_B^{-1} b \in \mathbb{R}^m$.*

Ist $\bar{a}_{rs} \neq 0$, so ist $A_{B'}$ mit $B' = (p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, q_s, p_{r+1}, \dots, p_m)$ eine Basis von A. Ferner gilt $A_{B'}^{-1} = E \cdot A_B^{-1}$, wobei $E = I$ mit der r-ten Spalte ersetzt durch η ist mit

- $\eta_r = 1/\bar{a}_{rs}$
- $\eta_i = -\bar{a}_{is}/\bar{a}_{rs}$ *für alle* $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{r\}$

Das Element $\bar{a}_{rs}$ heißt Pivotelement. Sind x bzw. x' die zu A_B bzw. $A_{B'}$ behörigen Basislösungen, so gilt:

- $x'_{p_i} = \bar{b}_i - \frac{\bar{a}_{is}}{\bar{a}_{rs}} \bar{b}_r = E_{i\bullet} \bar{b} = E_{i\bullet} \bar{b} = E_{i\bullet} x_B$ *für* $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{r\}$
- $x'_{q_s} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = E_{r\bullet} \bar{b}_r = E_{r\bullet} x_B$
- $x'_j = 0$ *andernfalls*

Beweis. Setze $a = A_{\bullet q_s}$, $\bar{d} = A_B^{-1}d = \bar{A}_{\bullet s}$ und $F = A_B^{-1}A_{B'}$. $A_{B'}$ entsteht aus A_B durch Ersetzen der r-ten Spalte durch d. Also hat F die folgende Gestalt:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & & \bar{d}_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & 0 \\ & & \bar{d}_r & & \\ 0 & & \vdots & \ddots & \\ & & \bar{d}_m & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \bar{d}_r \neq 0 \text{ nach Voraussetzung}$$

Es gilt $F \cdot E = I$ (nachrechnen), also $E = F^{-1}$. Aus $A_{B'} = A_B \cdot F$ folgt damit, dass $A_{B'}^{-1} = F^{-1}A_B^{-1} = E \cdot A - B^{-1}$. Rest nachrechnen. □

Satz 4.10 (Basisverbesserung) *Sei A_B eine zulässige Basis mit Basislösung x, $\bar{A} = A_B^{-1}A_N$, $\bar{b} = A_B^{-1}b$ und $\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$. Sei $q_s \in N$ mit $\bar{c}_s > 0$. Dann gilt:*

(a) Ist $\bar{A}_{\bullet s} \leq 0$, dann ist $c^T x$ auf $P^=(A, b)$ unbeschränkt.

(b) Ist $\bar{A}_{\bullet s} \not\leq 0$, dann setzen wir

$$\lambda_0 = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \mid i \in \{1, \ldots, m\},\ \bar{a}_{is} > 0 \right\}$$

und wählen einen Index $r \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\bar{b}_r / \bar{a}_{rs} = \lambda_0$. Dann ist $A_{B'}$ mit $B' = (p_1, \ldots, p_{r-1}, q_s, p_{r+1}, \ldots, p_m)$ eine zulässige Basis mit Basislösung x', so dass $c^T x' \geq x^T x$.

(c) Gelten die Voraussetzungen von (b) und ist A_B nichtdegeneriert, dann gilt $c^T x' > c^T x$.

Beweis. (a): $y \in P^=(A, b) \;\Leftrightarrow\; y_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N y_N \geq 0$ und $y_N \geq 0$. Für $\lambda > 0$ sei $y^\lambda \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

- $y_N^\lambda := \lambda e_s \geq 0$
- $y_B^\lambda := A_B^{-1}b - \bar{A}y_N^\lambda = A_B^{-1}b - \lambda \bar{A}_{\bullet s} \geq A_B^{-1}b \geq 0$.

Also ist $y^\lambda \in P^=(A, b)$ und

$$c^T y^\lambda = c_B A_B^{-1} b + \bar{c} y_N^\lambda = c_B A_B^{-1} b + \lambda \bar{c}_s \overset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

(b): Wegen $\bar{a}_{rs} > 0$ gilt nach dem Basisaustauschsatz: $B' = (p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}, q_s, p_{r+1}, \ldots, p_m)$ definiert eine Basis mit Basislösung x', wobei

$$x'_{p_i} = \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \cdot \bar{a}_{is} \geq \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \cdot \bar{a}_{is} = 0$$

für $i \neq r$ mit $\bar{a}_{is} > 0$ (Wahl von λ_0). Es gilt

- $x'_{p_i} = \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \cdot \bar{a}_{is} \geq \bar{b}_i$ für $i \neq r$ mit $\bar{a}_{is} \leq 0$
- $x'_{q_s} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \geq 0$

- $x'_j = 0$ sonst

Also ist x' eine zulässige Basislösung. Wir zeigen: $c^T x' \geq c^T x$.

$$\begin{aligned}
0 < \bar{c}_s &= (c_N^T - C_B^T A_B^{-1} A_N)_s \\
&= c_{q_s} - c_B^T \cdot \bar{A}_{\bullet s} \\
&= c_{q_s} - \sum_{i=1}^{m} c_{p_i} \bar{a}_{is} \\
&= (c_{q_s} - \sum_{i \neq r} c_{p_i} \bar{a}_{is}) - c_{p_r} \bar{a}_{rs} \\
&= \bar{a}_{rs} \cdot c_{B'}^T \cdot \eta - c_{p_r} \cdot \bar{a}_{rs} \\
&= \bar{a}_{rs}(c_{B'}^T \eta - c_{p_r}) \quad \text{und } \bar{a}_{rs} > 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$c_{B'}^T \eta - c_{p_r} = \frac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{rs}} > 0$$

Also ist

$$\begin{aligned}
c^T x' &= c_{B'}^T x_{B'} = c_{B'}^T \cdot A_{B'}^{-1} b \\
&= c_{B'}^T E \cdot A_B^{-1} b = c_B^T E \cdot x_B \\
&= \sum_{i \neq r} c_{p_i} \cdot x_{p_i} + c_{B'}^T \eta \cdot x_{p_r} \\
&= c_B^T x_B + \underbrace{(c_{B'}^T \eta - c_{p_r})}_{>0} \underbrace{x_{p_r}}_{\geq 0} \geq c^T x_B = c^T x
\end{aligned}$$

(c): Mit $x_{p_r} > 0$ folgt aus obiger Rechnung, dass $c^T x' > c^T x$ ist. $\square$

Zusammenfassend ergeben sich also folgende Rechenregeln für den Basistausch im Simplex-Tableau

$c_B^T A_B^{-1} b$	$c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T$
$A_B^{-1} b$	$A_B^{-1} A_N$

mit Darstellung

t_{00}	$t_{01}\ t_{02} \ldots t_{0n}$
t_{10}	$t_{11}\ t_{12} \ldots t_{1n}$
t_{20}	$t_{21}\ t_{22} \ldots t_{2n}$
$\ldots$	$\ldots$
t_{m0}	$t_{m1}\ t_{m2} \ldots t_{mn}$

- Initialisierung:

0	$-c$
b	A

Das Tableau ist zulässig, falls $t_{i0} \geq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und optimal, falls $t_{0j} \geq 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$.

- Pivotspalte: Spalte s, so dass $t_{0s} = \min_{1 \leq j \leq n, t_{0j} < 0} t_{0j}$ (größter Koeffizient)
  Falls $t_{is} \leq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$, dann ist das LP unbeschränkt, sonst:
- Pivotzeile: Zeile r, so dass $\frac{t_{r0}}{t_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m, t_{is} > 0} \frac{t_{i0}}{t_{is}}$
- Basiswechsel:
  - Pivotelement: $t'_{rs} = 1/t_{rs}$
  - Pivotzeile: $t'_{rj} = t_{rj}/t_{rs}$ für alle $j \neq s$
  - Pivotspalte: $t'_{is} = -t_{is}/t_{rs}$ für alle $i \neq r$
  - Rest $t'_{ij} = t_{ij} - (t_{rj} \cdot t_{is})/t_{rs}$ für alle $i \neq r$, $j \neq s$

Falls wir mit einem zulässigen Tableau starten und der Simplexalgorithmus terminiert, dann ergeben unsere Resultate oben, dass der Simplexalgorithmus eine optimale Lösung zurückliefert. Allerdings müssen wir noch klären, was zu tun ist, falls das Anfangstableau unzulässig ist und wie garantiert werden kann, dass der Simplexalgorithmus terminiert.

4.5 Initialisierung

Angenommen, wir haben ein LP der Form

$$\begin{aligned} & \max c^T x \\ \text{s.d.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

für das $b \not\geq 0$ ist (ansonsten ergibt das Anfangs-SGS eine zulässige Basislösung und wir brauchen keine Extrabehandlung). Um herauszufinden, ob dieses LP eine gültige Lösung hat, erweitern wir es um eine Hilfsvariable x_0 und verändern die Zielfunktion wie folgt:

$$\begin{aligned} & \max -x_0 \\ \text{s.d.} \quad & Ax - \bar{x}_0 \leq b \\ & x \geq 0, x_0 \geq 0 \end{aligned}$$

wobei $\bar{x}_0$ ein m-dimensionaler Vektor ist mit x_0 in jeder Dimension. Eine zulässige Lösung für dieses LP wäre z.B. $x = 0$ und $x_0 = |\min_i b_i|$. Weiterhin gilt offensichtlich:

Lemma 4.11 *Das ursprügliche LP hat eine zulässige Lösung genau dann, wenn das Hilfs-LP hat eine optimale Lösung mit $x_0 = 0$ hat.*

Wenden wir nun den Simplexalgorithmus auf das Hilfs-LP an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} s &= b + x_0 - Ax \\ z &= -x_0 \end{aligned}$$

wobei s der Vektor der Schlupfvariablen ist. Führen wir nun einen Basistausch zwischen x_0 und einer beliebigen Schlupfvariablen s_i mit $b_i = \min_j b_j$ durch, so erhalten wir das SGS

$$\begin{aligned} x_0 &= -b_i + A_{i\bullet}x + s_i \\ s_j &= b_j + (-b_i + A_{i\bullet}x + s_i) - A_{j\bullet}x \quad \text{für alle } j \in B \setminus \{i\} \\ &= (b_j - b_i) + (A_{i\bullet} - A_{j\bullet})x + s_i \\ z &= b_i - A_{i\bullet}x - s_i \end{aligned}$$

Da $b_i < 0$ und $b_i = min_j b_j$, gilt für den Vektor $\bar{b}$ in der Basisdarstellung $x_B = \bar{b} - \bar{A}x_N$ des SGS oben, dass $\bar{b} \geq 0$. Die Basislösung des SGS ist somit zulässig, und wir können den Simplexalgorithmus anwenden, um eine optimale Lösung für das Hilfs-LP zu finden. Gilt für diese Lösung $x_0 \neq 0$, dann brechen wir mit "Das LP hat keine Lösung" ab. Ansonsten unterscheiden wir zwischen zwei Fällen, um x_0 aus dem SGS zu entfernen:

- $0 \in N$: Dann streichen wir einfach die Spalte von x_0 im SGS und erhalten so ein SGS mit einer zulässigen Lösung für das ursprügliche LP.

- $0 \in B$: Angenommen x_0 sei assoziiert mit Zeile i des SGS. Da $x_0 = 0$ ist, muss dann $\bar{b}_i = 0$ sein. Wir können also einen degenerierten Basistausch zwischen x_0 und einer beliebigen Variablen x_j in N mit $\bar{a}_{ij} \neq 0$ durchführen, ohne den Zielfunktionswert zu verändern. Dadurch haben wir diesen Fall auf den vorherigen zurückgeführt.

Um die Umwandlung in ein SGS für das originale LP zu vereinfachen, fügt man am besten die z-Gleichung vom Oringinal-LP zum SGS des Hilfs-LP hinzu und führt die entsprechenden Änderungen durch, ohne diese z-Gleichung für den Basistausch zu betrachten. Dann muss man nach Streichung von x_0 lediglich die z-Gleichung des Hilfs-LPs durch die z-Gleichung des originalen LPs ersetzten, um mit dem Original-LP fortzufahren.

4.6 Terminierung

Als nächstes betrachten wir das Problem der Terminierung. Zunächst stellen wir fest:

Lemma 4.12 *Die Simplexmethode terminiert nicht genau dann, wenn sie zykelt.*

Beweis. Zykeln $\Rightarrow$ Nichtterminierung
Nichtterminierung $\Rightarrow$ Basiswiederholung $\Rightarrow$ Zykeln □

Als nächstes zeigen wir, dass der Simplexalgorithmus mit Blands Regel immer terminiert. Zur Erinnerung: Blands Regel besagt, dass die eintretende und austretende Variable ist immer die Kandidatin mit dem kleinsten Index ist.

Satz 4.13 *Bei Anwendung von Blands Regel terminiert der Simplexalgorithmus.*

Beweis. Wir zeigen, dass zykeln unmöglich ist. Angenommen, der Algorithmus zykelt. Dann gibt es eine Folge von Basen $B_0, B_1, \ldots, B_k$ mit $B_k = B_0$. Eine Variable x_j heißt *unstet*, wenn es zwei Basen B_p und B_q gibt, so dass x_j eine Basisvariable in B_p und eine Nichtbasisvariable in B_q ist.

Sei x_t die unstete Variable mit dem größten Index. Sei $B \in \{B_0, \ldots, B_k\}$ eine Basis, in der x_t austritt und x_s eintritt. Da x_t unstet ist, gibt es eine Folge von Basen $B, B', B'', \ldots, B^*$, für die x_t in B^* reinkommt. Für B gilt

$$\begin{aligned} x_B &= A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N \\ &= \bar{b} - \bar{A}x_N \quad \text{d.h. für alle } i \in B \text{ ist } x_i = \bar{b}_i - \textstyle\sum_j \bar{a}_{ij}x_j \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} z &= c_B^T A_B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_N)x_N \\ &= v + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j \end{aligned}$$

für eine Konstante v. Da alle Pivots degeniert sind, gilt auch für B^*, dass

$$z = v + \sum_j \bar{c}_j^* x_j \quad \text{mit } \bar{c}_j^* = 0 \text{ für alle } j \in B^*$$

Wir betrachten nun die folgende Lösung

- $x_s = \lambda$
- $x_j = 0$ für alle $j \in N \setminus \{s\}$
- $x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is}\lambda$ für alle $i \in B$

für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$. Da dieses x alle Restriktionen (abgesehen von $x \geq 0$) erfüllt, gilt aufgrund der Äquivalenz der Zielfunktionen, dass

$$v + \bar{c}_s\lambda = v + \bar{c}_s^*\lambda + \sum_{i \in B} \bar{c}_i^*(\bar{b}_i - \bar{a}_{is}\lambda)$$

und damit

$$(\bar{c}_s - \bar{c}_s^* + \sum_{i \in B} \bar{c}_i^* \bar{a}_{is})\lambda = \sum_{i \in B} \bar{c}_i^* \bar{b}_i$$

Da auf der rechten Seite eine Konstante unabhängig von λ steht, muss gelten

$$\bar{c}_s - \bar{c}_s^* + \sum_{i \in B} \bar{c}_i^* \bar{a}_{is} = 0 \qquad (*)$$

Weiterhin gilt:

- x_s rein in $B \quad \Rightarrow \quad \bar{c}_s > 0$
- x_s nicht rein in B^* und $s < t$ (da s unstet) $\quad \Rightarrow \quad \bar{c}_s^* \leq 0$

Aus $(*)$ folgt damit

$$\text{Es existiert ein } r \in B \text{ mit } \bar{c}_r^* \bar{a}_{rs} < 0. \qquad (**)$$

Wir wissen:

- $r \in B$ und $r \notin B^*$ (da $\bar{c}_r^* \neq 0$) $\Rightarrow r$ unstet $\Rightarrow r \leq t$ (r unstet)

- - x_t raus aus $B \Rightarrow \bar{a}_{ts} > 0$
  - x_t rein in $B^* \Rightarrow \bar{c}_t^* > 0$

  Also ist $\bar{c}_t^* \bar{a}_{ts} > 0 \quad \Rightarrow \quad r \neq t$.

Damit ist $r < t$. Da x_r nicht reinkam in B^*, gilt $\bar{c}_r^* < 0$ und damit $\bar{a}_{rs} > 0$ wegen $(**)$. Weil alle Pivots von B nach B^* degeneriert sind, sind alle Basislösungen gleich. Aus $r \in B$ und $r \notin B^*$ folgt $x_r = 0$ (in B und B^*) und damit $\bar{b}_r = 0$, da ansonsten wegen $\bar{c}_r^* \neq 0$ die Zielfunktionen für B und B^* unterschiedliche Werte hätten. Wegen $\bar{c}_r^* < 0$ und $\bar{a}_{rs} > 0$ wäre x_r also ein Austrittskandidat in B^* gewesen, aber wir wählten x_t, was wegen $r < t$ zu einem Widerspruch führt. $\square$

Es ist bekannt, dass der Simplexalgorithmus mit Blands Regel im schlimmsten Fall exponentiell lange braucht, um das Optimum zu finden, aber in der Praxis läuft der Simplexalgorithmus sehr schnell.