Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Christian Scheideler
Stefan Eckhardt

Sommersemester 2006
Übungsblatt 7
22. Juni 2006

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Abgabetermin: 28. Juni 2006 **vor** *der Zentralübung*

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 0, \ldots, m)$ konvexe Funktionen. Zeigen Sie, dass die Menge $S = \{x \in \mathbb{R}^n | g_i(x) \leq 0 \text{ für } i = 0, \ldots, m\}$ konvex ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Linearen Optimierungsprobleme

(a)

$$\begin{aligned} \max\ a^T w & \\ Aw &\leq e \\ w &\geq 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \max\ b^T x & \\ Bx &\leq f \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \max\ c^T y & \\ Cy &= g \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \max\ d^T z & \\ Dz &= h \end{aligned}$$

in denen A, B, C und D jeweils Matrizen und a, b, c, d, e, f, g, und h Vektoren geeigneter Länge sind. Geben Sie alle möglichen Transformationen zwischen die Problemen (a), (b), (c) und (d) an. (Beispiel: (a) kann in (b) transformiert werden mittels

$$B := \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix},\ f := \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix},\ b := a \text{ und } x := w.$$

wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet.)

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei das Lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max\ 10y_1 - 57y_2 - 9y_3 - 24y_4 & \\ \frac{1}{2}y_1 - \frac{11}{2}y_2 - \frac{5}{2}y_3 + 9y_4 &\leq 0 \\ \frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 + y_4 &\leq 0 \\ y_1 &\leq 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Wählen Sie die Variablenindizees nach dem in der Vorlesung angegebenen Schema und führen Sie sechs Pivots nach den folgenden Regeln durch

   (i) Die in die Basis eintretenden Variable ist diejenige mit dem größten Einheitsanstieg.

   (ii) Die in die Basis verlassende Variable ist die Kandidatin mit dem kleinsten Index

   Intrpretieren Sie das Ergebnis.

(b) Lösen Sie das Problem.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben sei das Lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rcl} \max\ x_1 + x_2 & & \\ x_1 + sx_2 & \leq & 1 \\ x_1 + tx_2 & \geq & 1 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Für welche Werte s und t hat das Problem

(a) keine zulässige Lösung,

(b) keine beschränkte Optimallösung,

(c) genau eine zulässige Lösung ?

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Eine Whisky-Importgesellschaft hat zwar einen unbeschränkten Absatzmarkt für ihre Produkte, jedoch limitieren Importbeschränkungen den monatlichen Einkauf auf maximal

2000 Flaschen „Sir Roses" zu je EUR $35,-$,

2000 Flaschen „Highland Wind" zu je EUR $25,-$,

2000 Flaschen „Old Frenzy" zu je EUR $20,-$.

Hieraus werden drei Mischungen A, B, und C zu den Preisen EUR $34,-$, EUR $28,50$, bzw. $22,50$ hergestellt, die folgenden Anforderungen gerecht werden müssen:

A: wenigstens 60% Sir Roses, höchstens 20% Old Frenzy,

B: wenigstens 15% Sir Roses, höchstens 60% Old Frenzy,

C: höchstens 50% Old Frenzy,

Welche Mischengen ergeben den höchsten Profit? Formulieren Sie die Fragestellung als Lineares Optimierungsproblem. (Hinweis: Eine Mischung kommt von vonherein nicht in Betracht. Bezeichnen Sie die Mengen von Sir Roses, Highland Wind, bzw. Old Frenzy in der ersten Mischung mit x_1, x_2, bzw. x_3 und in der zweiten Mischung mit x_4, x_5, bzw. x_6.)