Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Christian Scheideler
Stefan Eckhardt

Sommersemester 2006
Übungsblatt 9
6. Juli 2006

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Abgabetermin: 12. Juli 2006 **vor** *der Zentralübung*

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, wobei $V = \{u_1, \ldots, u_n\}$ sei. Eine *Knotenüberdeckung* von G ist eine Knotenmenge $C \subseteq V$, so dass für jede Kante $\{u_i, u_j\} \in E$ gilt: $\{u_i, u_j\} \cap C \neq \emptyset$. Beim Optimierungsproblem VC (*engl.* vertex cover) soll eine kleinste Knotenüberdeckung bestimmt werden.

(a) Erläutern Sie, dass das folgende ILP eine Arithmetisierung von VC ist.

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$\begin{array}{rcll} x_i + x_j & \geq & 1 & \forall \{u_i, u_j\} \in E \\ x_i & \in & \{0, 1\} & \forall u_i \in V \end{array}$$

(b) Zeigen Sie, dass deterministisches Runden der Lösung des relaxierten Problems, d. h. die Entscheidung „falls $x_i \geq \frac{1}{2}$, dann lege Knoten u_i in C“, eine Approximation der relativen Güte 2 garantiert. (Bemerkung: Zuerst muSS dazu gezeigt werden, dass durch diese Rundungsvorschrift ́luberhaupt eine Knotenüberdeckung gewonnen wird.)

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, wobei $V = \{u_1, \ldots, u_n\}$ sei. Eine *unabhängige Menge* (*engl.* independent set) von G ist eine Knotenmenge $I \subseteq V$, so dass für alle Kanten $\{u_i, u_j\} \in E$ gilt: $|\{u_i, u_j\} \cap I| \leq 1$. Beim Optimierungsproblem Independent Set soll eine größte unabhängige Menge von G gefunden werden. Stellen Sie ein ILP für das Problem Independent Set auf.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei

$$\begin{array}{rcl} \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) & = & (x_1 \vee \bar{x_2}) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee \bar{x_4}) \wedge (\bar{x_1} \vee x_2) \\ & & (x_1 \vee \bar{x_3} \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x_4}) \wedge (x_1 \vee \bar{x_3} \vee \bar{x_4}) \\ & & \wedge x_3 (x_1 \vee x_4) \wedge (\bar{x_1} \vee \bar{x_3}) \wedge x_1 \end{array}$$

eine Boolsche $(4, 10)$-Formel in KNF über der Variablenmenge $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

(a) Wieviele erfüllende Belegungen haben die einzelnen Klauseln?

(b) Bestimme b^*_Φ.

(c) Lösen sie das entsprechende relaxierte LP.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Beweisen Sie den Satz 6.3 aus der Vorlesung und geben Sie eine Boolsche (n, m)-Formel an, für die der Algorithmus tatsächlich nur $m/2$ Klauseln erfüllt.