Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Hanjo Täubig

Sommersemester 2006
Übungsblatt 1
28. April 2006

Informatik IV

Abgabetermin: 05.05.2006 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Um die asymptotische Laufzeit verschiedener Algorithmen zu vergleichen, verwendet man üblicherweise die Landau-Symbole, die für Funktionen f und g wie folgt definiert sein sollen:

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{O}(g) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists c > 0\ \exists x_0\ \forall x > x_0 : |f(x)| \leq c \cdot |g(x)| \\
f \in o(g) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall c > 0\ \exists x_0\ \forall x > x_0 : |f(x)| < c \cdot |g(x)| \\
f \in \Omega(g) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists c > 0\ \exists x_0\ \forall x > x_0 : |f(x)| \geq c \cdot |g(x)| \\
f \in \omega(g) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall c > 0\ \exists x_0\ \forall x > x_0 : |f(x)| > c \cdot |g(x)| \\
f \in \Theta(g) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists c_0 > 0\ \exists c_1 > 0\ \exists x_0\ \forall x > x_0 : c_0 \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \leq c_1 \cdot |g(x)|
\end{aligned}$$

(a) Was bedeuten die Landau-Symbole?
(Geben Sie eine möglichst kurze verbale Beschreibung für jedes Symbol an!)

(b) Es ist klar, dass folgendes gilt: $f \in o(g) \Rightarrow f \in \mathcal{O}(g)$ und $f \in \omega(g) \Rightarrow f \in \Omega(g)$
Beweisen Sie nun folgende Aussagen:

(i) $f \in \mathcal{O}(g) \Leftrightarrow g \in \Omega(f)$

(ii) $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(f)$

(iii) $f \in o(g) \Rightarrow f \notin \Omega(g)$

(iv) $f \in \omega(g) \Rightarrow f \notin \mathcal{O}(g)$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Geben Sie eine möglichst genaue Charakterisierung des asymptotischen Wachstums ($n \to \infty$) für folgende Funktionspaare an und begründen Sie Ihre Aussage.

(a) $f(n) = 2n^2 + 3n \quad g(n) = n^2 - n$

(b) $f(n) = n^2 \log n \quad g(n) = n^{5/2}$

(c) $f(n) = \log(n^6) \quad g(n) = n$

(d) $f(n) = \binom{n}{3} \quad g(n) = n^3$

(e) $f(n) = (\log n)^2 \quad g(n) = \sqrt{n}$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Entscheiden Sie für folgende Mengen, ob sie abzählbar sind und beweisen Sie Ihre Aussage!

(a) Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$,

(b) Menge der rationalen Zahlen (Brüche) $\mathbb{Q}$,

(c) Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$,

(d) Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$,

(e) Menge der ganzzahligen dreidimensionalen Koordinaten $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

(f) Potenzmenge der natürlichen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ bzw. $2^{\mathbb{N}}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ordnen Sie folgende Grammatiken in die Chomsky-Hierarchie ein:

(a) $P_1 = \{S \to \epsilon, S \to aS, S \to T, T \to bT, T \to b\}$

(b) $P_2 = \{S \to \epsilon, S \to T, T \to aT, T \to Tb, T \to \epsilon\}$

(c) $P_3 = \{S \to aA, S \to Sb, A \to bc\}$

(d) $P_4 = \{S \to aA, S \to bS, A \to aA, A \to c\}$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Sprachen L_k eine Grammatik des jeweiligen Typs k an und zeigen Sie, dass die Grammatik genau die beschriebene Sprache erzeugt!

(a) L_3 (regulär): Menge der Identifier einer Programmiersprache (bestehend aus Buchstaben und Zahlen, das erste Zeichen muss aber ein Buchstabe sein).

(b) L_2 (kontextfrei): Menge der Palindrome gerader Länge über dem Alphabet $\Sigma_2 = \{a, b\}$, also alle Wörter ww^R mit $w \in \{a, b\}^*$, wobei w^R das zu w rückwärts gelesene Wort darstellen soll.

(c) L_1 (kontextsensitiv): Menge aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$, deren Anzahl von a's, b's und c's genau gleich groß ist.