Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Hanjo Täubig

Sommersemester 2006
Übungsblatt 4
19. Mai 2006

Informatik IV

Abgabetermin: 26.05.2006 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Konstruieren Sie für folgenden deterministischen endlichen Automaten einen äquivalenten DEA mit einer minimalen Anzahl von Zuständen:

$$A = (\{0,1,2,3,4,5,6\},\ \{a,b\},\ \delta,\ 0,\ \{6\})$$

mit folgender Zustandsübergangsfunktion:

q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$
0	1	0
1	4	5
2	2	2
3	1	3
4	6	3
5	6	0
6	6	2

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Die Sprache

$$L_1 = \{a^{(k^3)}\ ;\ k \in \mathbb{N}_0\}$$

ist kontextfrei.

(b) Die Sprache

$$L_2 = \{a^i b^j c^k, \quad i < j < k \in \mathbb{N}\}$$

ist kontextfrei.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik G mit den folgenden Produktionen:

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow Z \mid \epsilon \\
X &\rightarrow aXZ \mid aX \mid a \\
Y &\rightarrow ZbZ \mid Zb \mid bZ \mid X \mid b \mid bb \\
Z &\rightarrow XZY \mid XY
\end{aligned}$$

(a) Geben Sie eine Grammatik in Chomsky-Normalform an, die die gleiche Sprache erzeugt.

(b) Entscheiden Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob die Wörter `aabaa` und `abab` in der Sprache enthalten sind.

Geben Sie ggf. einen Ableitungsbaum an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Wir definieren einen deterministischen endlichen Zweiwege-Automaten (2DFA) als Quintupel $M = (Q, \Sigma', \delta, q_0, F)$, wobei Q die Zustandsmenge, $\Sigma' = \Sigma \uplus \{\$_l, \$_r\}$ das Bandalphabet, $\delta : \ Q \times \Sigma' \to Q \times \{L, R\}$ die Zustandsübergangsfunktion, q_0 der Startzustand und F die Menge der akzeptierenden Zustände ist. Wir betrachten Eingaben der Form $\$_l w \$_r$, $w \in \Sigma^*$. Falls der Automat im Zustand q ist, das Zeichen a gelesen wird und $\delta(q, a) = (q', X)$, dann geht M in den Zustand q' über und der Lesekopf bewegt sich um eine Position nach links bzw. rechts, je nachdem, ob $X = L$ oder $X = R$. Nicht erlaubt sind Übergänge, die den Kopf links über $\$_l$ bzw. rechts über $\$_r$ hinaus bewegen würden. Des Weiteren nehmen wir o.B.d.A. an, dass M nur akzeptiert, wenn dann der Lesekopf über $\$_r$ steht.
Das Eingabeband besteht aus Feldern $F_0 F_1 \dots F_{k+1}$ (k ist die Länge der Eingabe w) und und ist mit $\$_l w \$_r$ beschrieben. Wir betrachten Kreuzungsfolgen bei 2DFAs, die wie folgt definiert sind: Zu jedem Zwischenraum zwischen zwei Feldern $F_i F_{i+1}$ des Eingabebandes definieren wir die dazugehörende Kreuzungsfolge c_i als die Folge der Zustände q', die entstehen, wenn der Lesekopf über Feld F_i steht, $\delta(q, T_i) = (q', R)$ gilt, wobei T_i das Zeichen ist, das in dem Feld F_i enthalten ist, oder entsprechend für den Fall, dass der Lesekopf über Feld F_{i+1} steht, $\delta(q, T_{i+1}) = (q', L)$ gilt, wobei T_{i+1} das im Feld F_{i+1} enthaltene Zeichen ist.

(a) Zeigen Sie, dass alle Kreuzungsfolgen endlich sind, falls der 2DFA terminiert.
Begründen Sie, warum $|c_i| \leq 2|Q| - 1$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Jede Sprache die von einem 2DFA erkannt wird, ist regulär
(Hinweis: Fassen Sie die Kreuzungsfolgen als Zustände eines NFA auf).

Gilt auch die Umkehrung?