Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Hanjo Täubig

Sommersemester 2006
Übungsblatt 6
9. Juni 2006

Informatik IV

Abgabetermin: 16.06.2006 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \; ; \; n \in N_0\} \cup \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^{2n} \; ; \; n \in N_0\}$$

zwar eine kontextfreie, aber keine deterministisch kontextfreie Sprache ist.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass es einen deterministischen Kellerautomaten M gibt, der L erkennt und konstruieren Sie dann aus zwei modifizierten „Kopien“ M' und M'' von M einen (deterministischen) Kellerautomaten $\tilde{M}$, der die Sprache $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \; ; \; n \in \mathbb{N}_0\}$ erkennt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Ein 2-Kellerautomat $(Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, Z_0, Z_0')$ ist ein Kellerautomat, der über einen zweiten Keller verfügt (der mit Z_0' initialisiert wird). Die Übergangsfunktion

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Delta \times \Delta \to \mathcal{P}_e(Q \times \Delta^* \times \Delta^*)$$

beschreibt die Vorgehensweise des 2-KA wie folgt ($\mathcal{P}_e$ bezeichnet die Menge aller endlichen Teilmengen). Liest der 2-KA im Zustand q die Eingabe a (auch $a = \epsilon$ möglich), sind Z_1, Z_2 die obersten Zeichen der beiden Keller und gilt $(q', \alpha_1, \alpha_2) \in \delta(q, a, Z_1, Z_2)$, dann kann der 2-KA in den Zustand q' übergehen und hierbei Z_1 durch α_1 und Z_2 durch α_2 ersetzen

(a) Zeigen Sie: Jede 1-Band-Turingmaschine kann durch einen 2-Kellerautomat simuliert werden.

(b) Gilt dies auch, falls der 2-Kellerautomat deterministisch sein soll?

(Der 2-KA ist deterministisch falls in Analogie zu den normalen Kellerautomaten gilt: $|\delta(q, a, Z_1, Z_2)| + |\delta(q, \epsilon, Z_1, Z_2)| \leq 1$ für alle $(q, a, Z_1, Z_2) \in Q \times \Sigma \times \Delta \times \Delta$.)

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Geben Sie eine Turing-Maschine an, die für $n > 0$, falls das Band mit bin$(n)\#$ initialisiert wird, die Funktion $f(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$ berechnet (das Band soll nach Terminierung mit bin$(\lfloor \log_2 n \rfloor)\#$ beginnen).

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Geben Sie eine Turingmaschine an, die zwei Binärzahlen addiert (gegeben als Startkonfiguration $(\epsilon, q_0, \{0,1\}^+\Box\{0,1\}^+)$), von der resultierenden Zahl die Quersumme berechnet und akzeptiert, wenn diese gerade ist. Gehen Sie wie folgt vor:

1. Entwerfen Sie eine Turingmaschine, die eine Binärzahl inkrementiert (um eins erhöht).

2. Entwerfen Sie eine Turingmaschine, die eine Binärzahl dekrementiert (um eins verringert).

3. Entwerfen Sie eine Turingmaschine, die berechnet, ob die Quersumme (binär) einer Binärzahl gerade ist.

4. Kombinieren Sie Ihre Turingmaschinen geeignet.