Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Matthias Baumgart

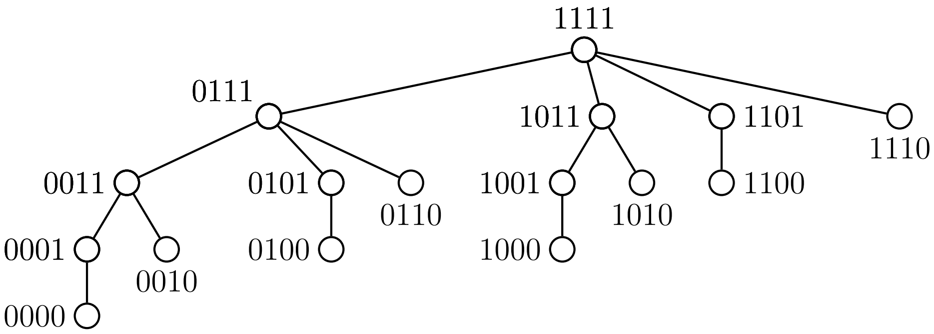
Wintersemester 2006/2007
Übungsblatt 5
17. November 2006

# Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

*Abgabetermin: 24.11.2006* **vor** *der Vorlesung*

## Aufgabe 1 (10 Punkte)

In einem Binomialbaum $B_k$, $k > 0$, seien die Knoten in der Reihenfolge einer *post-order Traversierung*, beginnend mit 0, durchnummeriert. Für jeden Knoten $v$ sei $\mathrm{num}(v) \in \{0,1\}^k$ die Binärdarstellung der Nummer dieses Knotens. Die Kinder jedes Knotens seien dabei in absteigender Reihenfolge ihrer Grade geordnet. Beispiel:




Zeigen Sie:

(a) Liegt $v$ in Tiefe $d_v$ im Baum $B_k$, so enthält der Binärstring $\mathrm{num}(v)$ genau $(k - d_v)$ Vorkommen des Zeichens 1.

(b) Die Anzahl der Kinder jedes Knotens $v$ ist gleich der Anzahl der 1'en rechts vom äußersten rechten Vorkommen einer 0 im Binärstring num(v).

## Aufgabe 2 (10 Punkte)

In den Bäumen eines Fibonacci-Heaps ist es nach Konstruktionsvorschrift erlaubt, dass von jedem inneren Knoten ein Kind entfernt werden darf, ohne dass der Baum restrukturiert werden muss. Hierdurch können vollständig entartete Bäume entstehen, das heißt Bäume, deren Tiefe in $\Omega(n)$ liegt, wobei $n$ die Anzahl der Knoten im Baum sei. Beschreiben Sie eine Abfolge von Operationen, mit der, angefangen bei einem leeren Heap, ein derartiger Baum entsteht.

## Aufgabe 3 (10 Punkte)

Angenommen Sie führen bei einem Fibonacci-Heap einen *Cascading-Cut* erst dann durch, wenn ein Knoten sein drittes Kind verliert, das heißt, Sie erlauben einem Knoten zwei Kinder zu verlieren und erst beim dritten Kind schneiden Sie den Knoten von seinem Vater ab. Was gilt dann für die Anzahl der Knoten eines Baumes mit Rang $r$? Was folgt daraus für die amortisierten Kosten der Operationen DecreaseKey und ExtractMin?

## Aufgabe 4 (10 Punkte)

Bei der ExtractMin-Operation für Fibonacci-Heaps wird ein Element $x$ mit minimalem Schlüssel (welches auf Grund der Heap-Bedingung die Wurzel eines Baums sein muss) gelöscht, und die Unterbäume von $x$ werden in die Wurzelliste eingefügt. Dann folgt eine Restrukturierungsoperation, die sukzessiv Bäume mit gleichem Wurzelrang verbindet, bis alle Wurzelränge paarweise verschieden sind. Beschreiben Sie eine effiziente Implementierung dieser Operation, deren Gesamtkosten durch $O(r + w)$ gegeben sind, wobei $r$ der maximale Wurzelrang und $w$ die Anzahl der Bäume in der Wurzelliste sei.