Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Matthias Baumgart

Wintersemester 2006/2007
Übungsblatt 9
15. Dezember 2006

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

Abgabetermin: 22.12.2006 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1 (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das zweitgrößte Element einer n-elementigen Menge mit $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$ Vergleichen gefunden werden kann. Geben Sie einen vollständigen formalen Beweis an, dass dies auch eine untere Schranke ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Der Median einer k-elementigen Menge (aus einem total geordneten Universum) ist das $\lceil \frac{k}{2} \rceil$-kleinste Element. Seien nun zwei sortierte Mengen mit je n Elementen gegeben (alle $2n$ Elemente seien paarweise verschieden). Zeigen Sie, dass der Median aller $2n$ Elemente in Zeit $O(\log n)$ bestimmt werden kann. Achten Sie darauf, dass in der Rekursion auch Teilmengen mit gerader Kardinalität auftreten können.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei eine n-elementige Menge M. Wieviele Vergleiche braucht man, um das Minimum *und* das Maximum von M gleichzeitig zu bestimmen? Beweisen Sie eine obere wie auch untere Schranke.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Betrachten Sie folgenden einfachen Algorithmus um das k-kleinste Element einer n-elementigen Menge zu bestimmen. Wir wählen ein Element x und teilen die restlichen Elemente in zwei Mengen, K und G, die die kleineren bzw. größeren Elemente enthalten. Wenn $|K| \geq k$, dann bestimmen wir rekursiv das k-kleinste Element in K, wenn $|K| = k - 1$, dann ist x das gesuchte Element, andernfalls bestimmen wir rekursiv das $k - |K| - 1$-kleinste Element in G. Wir gehen davon aus, dass alle Ordnungen gleichwahrscheinlich sind, und dass die Menge nur verschiedene Elemente enthält. Sei $C_{n,k}$ die durchschnittliche Anzahl von Vergleichen, die gebraucht werden, um das k-kleinste Element einer n-elementigen Menge mit dieser Methode zu bestimmen. Zeigen Sie, dass $C_{n,k} = O(n)$.