Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Matthias Baumgart

Wintersemester 2007/2008
Übungsblatt 12
18. Januar 2008

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

Abgabetermin: 25.01.2008 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, einfacher, zusammenhängender Graph mit $|V| \leq |E|$ und einer Gewichtsfunktion $w \colon E \to \mathbb{R}$.

(a) Sei T ein minimaler Spannbaum von G. Zeigen Sie, dass es Kanten $e \in T$ und $f \notin T$ gibt, so dass $(T \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ ein zweitbester minimaler Spannbaum von G ist.

(b) Beschreiben Sie einen effizienten Algorithmus, der einen zweitbesten minimalen Spannbaum von G berechnet.

Hinweis: Ein Spannbaum ist zweitbester minimaler Spannbaum, falls er, ordnet man alle Spannbäume gemäß ihres Gewichts schwach aufsteigend an, in dieser Ordnung an zweiter Stelle stehen könnte.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Ein *d-Heap* ist definiert als ein vollständiger d-ärer Baum, der die Heapbedingung erfüllt. Beschreiben Sie eine Implementierung von d-Heaps, die die INSERT-Operation in Zeit $O(\log_d n)$, die FINDMIN-Operation in konstanter und die DELETE-Operation in Zeit $O(d \cdot \log_d n)$ ermöglicht.

Hinweis: In einem vollständigen d-ären Baum hat jeder Knoten (mit höchstens einer Ausnahme) genau d Kinder, wobei die Knoten Ebene für Ebene von links nach rechts eingefügt werden. D.h. nur der innere Knoten, an dem zuletzt Kinder angefügt werden, darf weniger als d Kinder besitzen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine Implementierung von Dijkstra's Algorithmus unter Verwendung von d-Heaps (vgl. Aufgabe 2) Laufzeit $O(m \log_{2+\frac{m}{n}} n)$ hat (für geeignet gewähltes d).

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit einer Längenfunktion $c \colon E \to \mathbb{R}^+$ und $s \in V$. Ein *kürzester-Wege-Baum mit Wurzel s* ist ein Baum $T = (V', E')$ mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$, der für alle $v \in V$, für die ein kürzester Pfad von s nach v in G existiert, einen solchen Pfad enthält. Sei ferner für alle $v \in V$ die Länge eines kürzesten Pfades von s nach v gegeben. Zeigen Sie, wie daraus in linearer Zeit ein kürzester-Wege-Baum in G mit Wurzel s konstruiert werden kann.