Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Matthias Baumgart

Wintersemester 2007/2008
Übungsblatt 5
16. November 2007

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

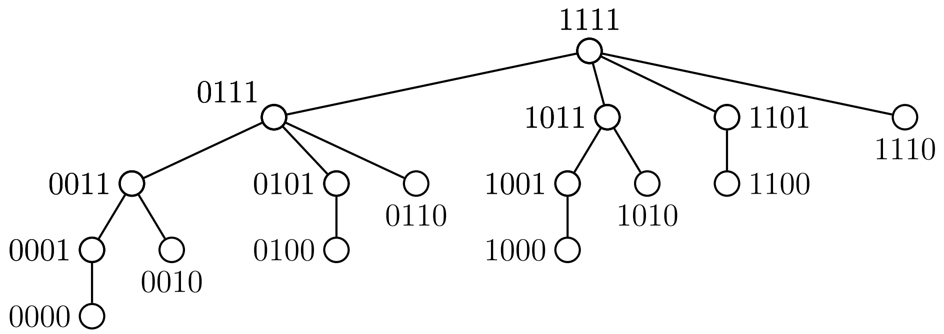
Abgabetermin: 23.11.2007 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Die Pfadlänge P_n eines Binomialbaums B_n sei definiert als die Summe der Level aller seiner Knoten. Leiten Sie eine geschlossene Formel für P_n in Abhängigkeit von n her.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

In einem Binomialbaum B_k, $k > 0$, seien die Knoten in der Reihenfolge einer *post-order Traversierung*, beginnend mit 0, durchnummeriert. Für jeden Knoten v sei $\mathrm{num}(v) \in \{0,1\}^k$ die Binärdarstellung der Nummer dieses Knotens. Die Kinder jedes Knotens seien dabei in absteigender Reihenfolge ihrer Grade geordnet. Beispiel:



Zeigen Sie:

(a) Liegt v in Tiefe d_v im Baum B_k, so enthält der Binärstring $\mathrm{num}(v)$ genau $(k - d_v)$ Vorkommen des Zeichens 1.

(b) Die Anzahl der Kinder jedes Knotens v ist gleich der Anzahl der Einsen rechts vom äußersten rechten Vorkommen einer Null im Binärstring num(v).

Aufgabe 3 (10 Punkte)

In den Bäumen eines Fibonacci-Heaps ist es nach Konstruktionsvorschrift erlaubt, dass von jedem inneren Knoten ein Kind entfernt werden darf, ohne dass der Baum restrukturiert werden muss. Hierdurch können vollständig entartete Bäume entstehen, das heißt Bäume, deren Tiefe in $\Omega(n)$ liegt, wobei n die Anzahl der Knoten im Baum sei. Beschreiben Sie eine Abfolge von Operationen, mit der, angefangen bei einem leeren Heap, ein derartiger Baum entsteht.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Angenommen, Sie führen bei einem Fibonacci-Heap einen *Cascading-Cut* erst dann durch, wenn ein Knoten sein drittes Kind verliert, das heißt, Sie erlauben einem Knoten, zwei Kinder zu verlieren, und erst beim dritten Kind schneiden Sie den Knoten von seinem Vater ab. Was gilt dann für die Anzahl der Knoten eines Baumes mit Rang r? Was folgt daraus für die amortisierten Kosten der Operationen DecreaseKey und ExtractMin?