Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Christian Scheideler
Jonas Pfoh

Wintersemester 2007/2008
Übungsblatt 11
01. Februar 2008

Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin: 08.02.2008 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei $B = \{0, 1\}$ die Menge der Basiszustände.

a) Zeigen Sie, dass $|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2}(1-i)|1\rangle$ eine gültige Superposition eines Quantencomputers auf B ist, d.h. zeigen Sie, dass $||p||^2 = 1$ gilt.

b) Betrachten Sie die folgende Übergangsmatrix U:

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass U unitär ist.

c) Berechnen Sie das Resultat $|q\rangle$ von U angewandt auf $|p\rangle$.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsamplitude von $|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$ gegeben $|q\rangle$, d.h. berechnen Sie den komplexen Wert der Projektion von q auf v.

e) Sei $O = \{E_0, E_1\}$ eine Standard-Beobachtung, bei denen E_0 den Fall repräsentiert, dass der Basiszustand $|0\rangle$ beobachtet wird und E_1 den Fall repräsentiert, dass $|1\rangle$ beobachtet wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass E_1 wahr ist falls wir im Zustand $|p\rangle$ sind. Berechnen Sie auch den neuen Zustand $|p'\rangle$, den der Quantencomputer annimmt falls E_1 wahr ist.

f) Sei $O = \{E_0, E_1\}$ eine Nicht-Standard-Beobachtung, bei denen E_0 durch den Unterraum U_0, der durch $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ erzeugt wird, und E_1 durch den Unterraum U_1, der durch $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ erzeugt wird, repräsentiert wird. Zeigen Sie, dass die Beobachtung immer noch die Bedingungen einer gültigen Beobachtung (d.h. $U_0 \perp U_1$ und $U_0 \times U_1 = \mathbb{C}^B$) erfüllt. Berechnen Sie den neuen Zustand $|p'\rangle$, falls E_0 beobachtet wird.

Aufgabe 2

Zeigen Sie:
Eine Übergangsfunktion δ ist wohlgeformt wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Für die Wahrscheinlichkeitsamplitude aller Paare p, x mit $p \in Q$ und $x \in \Gamma$ gilt:

$$\sum_{q,y,d} ||\delta(p, x, q, y, d)||^2 = 1$$

- Für alle $(p, x) \neq (p', x')$ mit $p, p' \in Q$ und $x, x' \in \Gamma$ gilt:

$$\sum_{q,y,d} \delta(p, x, q, y, d) \cdot \delta^*(p', x', q, y, d) = 0$$