Wieviele Personen kennen sich?

12. November 1999

Wir haben in den Hausaufgaben gesehen, daß es in einer Gruppe von 10 Personen 3 Personen gibt, die sich gegenseitig kennen, oder 4, die sich gegenseitig nicht kennen (oder beides). Wie bisher stellen wir das Problem graphisch dar, indem wir die Personen als Knoten malen, und zwei Personen, die sich kennen mit einer blauen Kante verbinden, Personen die sich nicht kennen mit einer roten Kante. In diese „graphischen“ Sprache übersetzt, finden wir auf jedem Graphen mit 10 Knoten und roten und blauen Kanten also mindestens ein blaues Dreieck oder aber 4 Knoten, die alle mit blauen Kanten verbunden sind.
Im folgenden werden wir immer wieder von Graphen sprechen, deren Knoten alle untereinander mit Kanten einer Farbe verbunden sind. Diese Graphen haben einen Namen: Man nennt sie *vollständige Graphen auf n Knoten* und bezeichnet sie mit K_n.

Eine obere Schranke. Wie kann man obiges Resultat verallgemeinern? Man kann sich zum Beispiel überlegen, daß das Resultat natürlich auch für alle Graphen gilt, die den K_{10} enthalten. Eine andere wichtige Frage ist die, wie groß Graphen sein müssen, damit sie einfarbige vollständige Teilgraphen enthalten. Diese Frage beantwortet der nächste Satz.

Satz 1 *Jeder vollständige Graph mit mindestens $\binom{s+t}{s}$ Knoten, dessen Kanten entweder rot oder blau gefärbt sind, enthält*

einen roten K_s oder einen blauen K_t

als Teilgraphen.

Der Satz wird durch Induktion nach $s+t$ bewiesen, Man überprüft leicht, daß die Induktionsverankerung stimmt. Den Induktionsschritt beweisen wir, indem wir den Fall $s+t$ auf den Fall $s+t-1$ zurückführen: Sei v ein beliebiger Knoten des Graphen mit $\binom{s+t}{s}$ Knoten. Die anderen Knoten des Graphen sind mit v entweder durch eine rote oder durch eine blaue Kante verbunden. Wir werden im folgenden die Knoten, die mit v durch eine rote Kante verbunden sind, die *rote Nachbarschaft* nennen, die anderen Knoten die *blaue Nachbarschaft.* Insgesamt hat v genau $\binom{s+t}{s}-1$ Nachbarn. Wegen des Satzes über das Pascalsche Dreieck wissen wir, daß

$$\binom{s+k}{s}-1=\binom{s+t-1}{s-1}+\binom{s+t-1}{s}-1.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Die Größe der roten Nachbarschaft ist $\geq \binom{s+t-1}{s-1}$. In diesem Fall sind wir fertig, denn nach Induktionsannahme finden wir innerhalb der roten Nachbarschaft einen roten K_{s-1}, der mit dem Knoten v verbunden ist (wir haben also unseren roten K_s gefunden) oder wir finden einen einen blauen K_t

2. Die Größe der roten Nachbarschaft ist $< \binom{s+t-1}{s-1}$. Daraus folgt aber, daß die Größe der blauen Nachbarschaft $> \binom{s+t-1}{s} - 1 = \binom{s+t-1}{t-1} - 1$ ist. Das heißt aber, daß die blaue Nachbarschaft $\geq \binom{s+t-1}{t-1}$ ist, und wir können nun dasselbe Argument wie im 1. Fall anwenden, wobei wir nur rot und blau vertauschen müssen.

Der obige Satz, sagt uns daß wir in Graphen auf $\binom{s+t}{s}$ Knoten in jedem Fall einen roten K_s oder einen blauen K_t (oder beides) finden. Wenn wir $R(s,t)$ die minimale Anzahl Knoten der Graphen bezeichnen, in denen immer die gewünschten Teilgraphen vorkommen, sagt uns der obige Satz, daß

$$R(s,t) \leq \binom{s+t}{s}$$

ist.
Wir haben also eine *obere Schranke* für $R(s,t)$ gefunden. In Wirklichkeit müssen die Graphen aber oft nicht so groß sein, denn aus der Vorlesung wissen wir zum Beispiel, daß es in jeder Gruppe von 6 Personen 3 Personen gibt, die sich alle untereinander kennen, oder 3, die sich gegenseitig nicht kennen. Damit wissen wir aber auch, daß $R(3,3) \leq 6$ sein muß. Der obige Satz liefert uns aber nur $R(3,3) \leq \binom{6}{3} = 20$.

Der Fall $r = s$. Wir betrachten nun den Fall wo die $r = s$ ist. Hier gilt nach dem obigen Satz

$$R(s,s) \leq \binom{2s}{s} = \frac{(2s)!}{s!s!}.$$

Wenn s groß ist können wir den letzten Ausdruck mit der Stirlingschen Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

abschätzen und erhalten (im Kopf, mit Bleistift und Papier oder mit Maple):

```
> stirling:= n->sqrt(2*Pi*n)*(n/exp(1))^n;
```

$$stirling := n \to \sqrt{2\,\pi\,n}\,(\frac{n}{e})^n$$

```
> simplify(stirling(2*n)/(stirling(n)^2));
```

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{n}}$$

Es gilt somit, daß

$$R(s,s) \leq 4^s.$$

Eine untere Schranke. Wir werden nun eine *untere Schranke* für $R(s,s)$ beweisen, das heißt wir zeigen, daß $R(s,s)$ immer größer als ein gewisser Wert sein muß. Damit haben wir dann $R(s,s)$ von oben und unten eingeschränkt.

Satz 2 $R(s,s) > 2^{s/2}$

Zuerst führen wir eine Abkürzung ein, indem wir $N := 2^{s/2}$ setzen. Die Aussage, die wir beweisen wollen ist, daß es einen vollständigen Graphen auf N Knoten mit rot- oder blaugefärbten Kanten gibt, der weder einer vollständigen Roten Teilgraphen mit s Knoten enthält noch einen vollständigen blauen Teilgraphen mit s Knoten. Wir zeigen dies, indem wir zeigen, daß die Anzahl der Graphen mit den gewünschten roten oder blauen Teilgraphen echt kleiner als die Anzahl der Graphen auf N Knoten ist. Die Anzahl der Graphen, die einen vollständigen roten Graph mit s Knoten enthalten ist gleich

$$\binom{N}{s} 2^{\binom{N}{2}-\binom{s}{2}},$$

denn um einen solchen Graphen zu erhalten, wählen wir zuerst die s Knoten des Teilgraphen aus und färben alle anderen Kanten (davon gibt es $\binom{N}{2}-\binom{s}{2}$) rot oder blau. Natürlich ist die Anzahl der Graphen, die einen vollständigen blauen Teilgraph enthalten genau gleich groß. Insgesamt gibt es also

$$\leq 2\binom{N}{s} 2^{\binom{N}{2}-\binom{s}{2}}$$

Graphen, die einen vollständigen roten oder blauen Teilgraph mit s Knoten enthalten. (Das „$\leq$" kommt daher, daß wir alle Graphen, die sowohl einen vollständigen roten als auch einen vollständigen blauen Teilgraphen enthalten doppelt gezählt haben.) Wir müssen nun zeigen, daß diese Zahl kleiner ist, als die Anzahl der vollständigen Graphen auf N Knoten ist, die rote oder blauen Kanten haben. Davon gibt es aber genau $2^{\binom{N}{2}}$ viele. Wir müssen also

$$2\binom{N}{s} 2^{\binom{N}{2}-\binom{s}{2}} < 2^{\binom{N}{2}}$$

zeigen. Wenn wir nun $N := 2^{s/2}$ einsetzen, erhalten wir mit Maple...

```
> N:=s->2^(s/2);
```

$$N := s \to 2^{(1/2\,s)}$$

```
> f:=s->binomial(N(s),s)*s^(binomial(N(s),2)-binomial(s,2));
```

$$f := s \to \mathrm{binomial}(\mathrm{N}(s),\, s)\, s^{(\mathrm{binomial}(\mathrm{N}(s),\, 2)-\mathrm{binomial}(s,\, 2))}$$

```
> plot([f(s),2^binomial(N(s),2)],s=1..3);
```