Graphen ohne Kreise, Dreiecke und mit vielen Farben

10. Dezember 1999

Im Kapitel über Ramsey-Zahlen, haben wir uns überlegt, wieviele Knoten ein vollständiger Graph mit roten und blauen Kanten haben muß, damit er einen blauen K_s oder einen roten K_t enthält. Genau dieselbe Fragestellung kann auch folgendermassen formuliert werden: wenn die blauen Kanten wirklich im Graph vorhanden sind, und die roten Kanten aus dem vollständigen Graph herausgenommen werden, haben die Frage beantwortet, wieviele Knoten ein Graph mindestens enthalten muß, damit er entweder einen K_s als Teilgraph enthält, oder aber es eine Menge von mindestens t Knoten gibt, zwischen denen keine Kante verläuft.
Hier wollen wir nun eine ähnliche Fragestellung betrachten — allerdings wollen wir nun Bedingungen für die Anzahl Kanten herleiten…

Graphen ohne C_4. Als erstes beschäftigen wir uns mit der Frage, wieviele Kanten ein bipartiter Graph maximal enthalten darf, damit er keinen Kreis der Länge vier enthält.

Satz 1 *Ein bipartiter Graph $G = (A \uplus B, E)$ mit n Knoten in A und n Knoten in B mit*

$$m \leq n^{3/2}$$

Kanten enthält keinen Kreis der Länge vier.

Beweis. Wenn G keinen Kreis der Länge vier enthält, dann darf kein Paar von Knoten aus B in der Nachbarschaft von mehr als einem Knoten aus A vorkommen. Es muß also

$$\sum_{v \in A} \binom{\deg v}{2} \leq \binom{n}{2}$$

gelten. Die linke Seite der Ungleichung ist aber $\leq \frac{m^2}{2n} - \frac{m}{2}$ *(warum?)* und es gilt somit die Ungleichung

$$\frac{m^2}{2n} - \frac{m}{2} \leq \frac{n(n-1)}{2},$$

woraus die Behauptung folgt. □

Graphen ohne K_n. Die Fragestellung von oben kann man verallgemeinern. So hat Mantel z.B. 1907 gezeigt, daß jeder Graph mit n Knoten, der mehr als $\lfloor n^2/4 \rfloor$ Kanten enthält auch ein Dreieck enthält. Turán hat dieses Resultat verallgemeinert und den folgenden Satz bewiesen, der als erster Satz der sogenannten *extremalen Graphentheorie* (engl. *extremal graph theory*) gilt. Die extremale Graphentheorie beschäftigt sich damit, die maximale Anzahl Kanten zu finden, die ein Graph mit einer gewissen Eigenschaft haben kann. Die Graphen, deren Anzahl Kanten maximal ist, werden als *extremale Graphen* bezüglich der Eigenschaft bezeichnet.

Satz 2 (Turán, 1941) *Ein Graph mit n Knoten enthält einen K_p als Teilgraph, wenn er mehr als*

$$M(n,p) := \frac{p-2}{2(p-1)}n^2 - \frac{r(p-1-r)}{2(p-1)}$$

Knoten enthält, wobei r der Rest der Division von n durch $p-1$ ist.

Chromatische Zahl und Δsfreie Graphen. Nun wollen wir uns mit Färbungen von Graphen beschäftigen. In der Vorlesung wurde der Begriff der Knotenfärbung eines Graphen eingeführt. Dabei geht es darum, den Knoten eines Graphen Farben zuzuweisen, wobei zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, unterschiedliche Farben erhalten müssen. Das Ziel ist es natürlich, dabei möglichst wenige Farben zu verwenden. Die minimale Anzahl Farben, die benötigt werden, um einen Graphen G zu färben, wird die *chromatische Zahl* genannt und mit $\chi(G)$ bezeichnet. Für besonders einfache Graphen, ist es leicht, die chromatische Zahl zu bestimmen, so ist z.B. klar, daß ein Graph ohne Kanten mit nur einer Farbe gefärbt werden kann, ein bipartiter Graph mit zwei Farben, und die Graphen vollständigen Graphen K_n brauchen besonders viele Farben, nämlich n. Außerdem kann man sich leicht überlegen, daß jeder Graph, der einen vollständigen Teilgraph mit sagen wir ℓ Knoten enthält, mindestens chromatische Zahl ℓ hat. Wenn wir die Größe des größten in G enthaltenen vollständigen Teilgraphen bezeichnen[1], gilt also, daß

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

Es hat sich leider herausgestellt, daß es ziemlich schwierig ist, die chromatische Zahl eines Graphen zu berechnen. Karp hat 1972 gezeigt, daß es schon schwer ist zu entscheiden, ob ein Graph mit einer gegebenen Anzahl Farben färbbar ist. Wie viele anderer interessante Probleme, ist auch dieses Problem $\mathcal{NP}$-vollständig[2], und kann deswegen wahrscheinlich nicht in polyno-

[1] Solche größten vollständigen Teilgraphen kommen häufig vor. Ein vollständiger Teilgraph wird als *Clique* bezeichnet, und die Größe der größten Clique ist durch die *Cliquenzahl* $\omega(G)$ gegeben. Da alle in einer Clique enthaltenen Knoten miteinander verbunden sind, ist das „Gegenteil" einer Clique eine Menge von Knoten, die nicht miteinander verbunden sind. Solche Mengen werden unabhängige Mengen (engl. *independent set*) genannt, und die Größe der größten unabhängigen Menge in G wird mit $\alpha(G)$ bezeichnet.

[2] Insbesondere sind die entsprechenden Entscheidungprobleme für $\alpha(G)$ und $\omega(G)$ auch $\mathcal{NP}$-vollständig. . .

mieller Zeit gelöst werden.
Wir haben oben, die trivial untere Schranke

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

hergeleitet. Bereits der Kreis mit nur fünf Knoten, der C_5 zeigt, daß diese Schranke nicht „scharf" ist, d.h. daß nicht Gleichheit gelten muß: der C_5 kann nicht mit weniger als drei Farben gefärbt werden, die größte Clique des C_5 enthält aber nur zwei Knoten! Wir wollen nun zeigen, daß diese Schranke beliebig schlecht werden kann, man kann nämlich Graphen konstruieren, die beliebig große chromatische Zahl haben, für die aber immer $\omega(G) = 2$ gilt — man kann also dreiecksfreie Graphen konstruieren, die eine beliebig große chromatische Zahl haben. Ein Verfahren zur Konstruktion dreiecksfreier k-chromatischer Zahlen hat Mycielski angegeben. Die Graphen M_k mit $\chi(M_k)$ werden wie folgt konstruiert: Als M_3 nehmen wir den C_5, denn er ist, wie wir ja schon gesehen haben, dreiecksfrei und hat chromatische Zahl drei. Den Graphen M_{k+1} erhält man aus M_k mit den Knoten $v_1, \ldots, v_n$, indem man neue Knoten $u_1, \ldots, u_n$ und w hinzufügt. Der Knoten w wird nun mit allen Knoten $u_1, \ldots, u_n$ verbunden und jeder der Knoten u_i $(1 \leq i \leq n)$ wird mit allen Nachbarn von V_i verbunden.

Satz 3 (Mycielski, 1955) *Die Graphen M_k sind dreiecksfrei, k-chromatisch und haben $3 \cdot 2^{k-1} - 1$ Knoten.*

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach k geführt. Für $k = 3$ ist die Aussage offenbar richtig. Bei der Konstruktion des M_{k+1} wird die Anzahl Knoten des M_k verdoppelt und außerdem kommt noch ein weiter Knoten hinzu, deswegen enthält der M_{k+1} $3 \cdot 2^{k-1} - 1$ Knoten. Nach der Konstruktion ist er dreiecksfrei: Die Knoten $u_1, \ldots, u_n$ bilden eine stabile Menge und somit gehört der Knoten w zu keinem Dreieck; da nach Voraussetzung M_k dreiecksfrei ist, sind die Nachbarschaften $\Gamma(v_i)$ stabil und die Knoten u_i liegen ebenfalls in keinem Dreieck. Wir zeigen nun, daß sowohl $\chi(M_{k+1}) \leq k + 1$ als auch $\chi(M_{k+1}) \geq k + 1$ gilt und somit $\chi(M_{k+1}) = k + 1$ sein muß.
$\chi(M_{k+1}) \leq k + 1$: jede k-Färbung c von von M_k kann auf M_{k+1} erweitert werden, indem $c(u_i) := c(v_i)$ gesetzt wird und der Knoten w durch $c(w) := k + 1$ gefärbt wird.
$\chi(M_{k+1}) \geq k + 1$: Angenommen, es gäbe eine k-Färbung c von M_{k+1}. Seien $v_1, \ldots, v_n$ die Knoten der Kopie von M_k in M_{k+1}. O.B.d.A sei $c(w) = k$. Dann ist also keiner der Knoten $u_1, \ldots, u_n$ mit der Farbe k gefärbt. Offensichtlich erhalten wir nun eine neue zulässige k-Färbung von M_{k+1}, wenn wir jeden Knoten v_i mit $c(v_i) = k$ mit der Farbe $c(u_i)$ färben. Diese induziert aber eine $(k - 1)$-Färbung von M_k, was im Widerspruch zur Annahme $\chi(M_k) = k$ steht! $\square$

Die so konstruierten Graphen M_k sind ziemlich groß — die Anzahl der Knoten wächst exponentiell mit k. Erdős konnte zeigen, daß die minimale Anzahl Knoten eines k-chromatischen Graphen in $O((k \log k)^2)$ ist. Dieser Ausdruck in der $O(\cdot)$-Notationen gibt also eine obere Schranke an, eine untere Schranke für die minimale Anzahl Knoten wurde ebenfalls von Erdős zusammen Hajnal gezeigt, sie ist in $\Omega(k^2 \log k)$.

```
>   plot([(k*log(k))^2, k^2*log(k)],k=1..100);
```