Grundlegende Techniken für Summen und Rekursionen

Thomas Schickinger

31. Oktober 2000

1 Summationsfaktoren

Idee: Wandle eine Rekursion in eine Summe um.

Allgemeines Prinzip: Vereinfache Rekursion mittels Durchmultiplizieren mit geeignet gewähltem Summationsfaktor s_n:
Die Rekursion

$$a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n$$

wird zu

$$s_n a_n T_n = s_n b_n T_{n-1} + s_n c_n.$$

s_n sei so gewählt, daß $s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}$. Damit gilt

$$s_n a_n T_n = s_{n-1} a_{n-1} T_{n-1} + s_n c_n.$$

Durch die Substitution $S_n := s_n a_n T_n$ erhalten wir die Rekursion

$$S_n = S_{n-1} + s_n c_n.$$

Diese kann nun einfach als Summe geschrieben werden und dann (hoffentlich) gelöst werden.

Es bleibt jedoch die Frage, wie s_n gewählt werden muß, damit die oben angegebene Eigenschaft erfüllt ist. Dazu „falten" wir die Bedingung $s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}$ auf zu

$$s_n = \frac{a_{n-1}}{b_n} s_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{b_n} \frac{a_{n-2}}{b_{n-1}} s_{n-2} = \ldots$$

Insgesamt setzen wir

$$s_n = \frac{a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1}{b_n b_{n-1} \ldots b_2}.$$

Durch diese Wahl (oder durch ein konstantes Vielfaches davon) gilt wie gefordert $s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}$ für $n > 1$.

Beispiel: QuickSort-Rekursion
Wir betrachten die Rekursion

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_n &= n + 1 + \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_k \text{ für } n > 0, \end{aligned}$$

die bei der Average-Case-Analyse von QuickSort auftaucht.

Diese Rekursion müssen wir erst in eine Form bringen, auf die wir die Summationsfaktor-Technik anwenden können. Dazu eliminieren wir die störende Summe durch Bildung der Differenz $nC_n - (n-1)C_{n-1}$. Es gilt

$$\begin{array}{rcl} nC_n & = & n^2 + n + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_k \text{ für } n > 0 \\ (n-1)C_{n-1} & = & (n-1)^2 + (n-1) + 2\sum_{k=0}^{n-2} C_k \text{ für } n > 1 \\ \hline nC_n - (n-1)C_{n-1} & = & 2n + 2C_{n-1} \text{ für } n > 1 \end{array}$$

wobei die letzte Gleichung durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten entsteht. Insgesamt erhalten wir die neue (einfachere) Rekursion

$$\begin{array}{rcl} C_0 & = & 0 \\ nC_n & = & (n+1)C_{n-1} + 2n \text{ für } n > 0. \end{array}$$

Dabei haben wir berücksichtigt, daß die Rekursionsgleichung auch im Fall $n = 1$ erfüllt ist, da $C_1 = 2$. Dies folgt nicht direkt aus der obigen Subtraktion, da wir dort nur eine Gleichung für $n > 1$ erhalten haben.

Auf die neue Rekursion können wir nun die Summationsfaktor-Technik anwenden, indem wir $a_n := n$ und $b_n := n + 1$ setzen. Damit erhalten wir

$$s_n = \frac{(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 1}{(n+1)n \cdot \ldots \cdot 3} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Wenn wir die Rekursion

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2n$$

mit s_n durchmultiplizieren, so folgt

$$\frac{2}{n+1}C_n = \frac{2}{n}C_{n-1} + \frac{4}{n+1}.$$

Mit der Substitution $S_n := \frac{2}{n+1}C_n$ erhalten wir wiederum eine neue (jetzt sehr einfache) Rekursion:

$$\begin{array}{rcl} S_0 & = & 0 \\ S_n & = & S_{n-1} + \dfrac{4}{n+1} \text{ für } n > 0. \end{array}$$

Expandieren der Rekursion führt zu

$$S_n = S_{n-1} + \frac{4}{n+1} = S_{n-2} + \frac{4}{n+1} + \frac{4}{n} = \ldots = \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{i+1},$$

bzw.

$$C_n = \frac{n+1}{2}S_n = 2(n+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}.$$

Die verbleibenden Summe können wir leicht durch die n-te harmonische Zahl $H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ ausdrücken, denn

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - 1 = H_{n+1} - 1.$$

Daraus folgt sofort

$$C_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1).$$

2 Perturbation

Diese Technik dient zum Berechnen von Summen. Der Trick besteht darin, durch Entfernen des ersten und des letzten Summengliedes eine Gleichung für den Wert der Summe zu erhalten. Wir betrachten dazu zwei Beispiele.

1. Beispiel Als 1. Beispiel untersuchen wir die geometrische Reihe. Sei $S_n := \sum_{k=0}^{n} x^k$ für $x \neq 1$ und $x > 0$.

Einerseits gilt (entferne letztes Summenglied)

$$S_{n+1} = x^{n+1} + S_n.$$

Andererseits gilt (entferne erstes Summenglied)

$$S_{n+1} = x^0 + \sum_{k=1}^{n+1} x^k = 1 + x \cdot \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + xS_n.$$

Daraus erhalten wir die Gleichung

$$x^{n+1} + S_n = 1 + xS_n$$

mit der Lösung

$$S_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

2. Beispiel Wir untersuchen die Summe $S_n := \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k$. Auf dieselbe Weise wie zuvor erhalten wir

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)2^{n+1}$$

und

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 0 + \sum_{k=1}^{n+1} k2^k = \sum_{k=0}^{n} (k+1)2^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k2^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} = 2S_n + 2^{n+2} - 1 - 1, \end{aligned}$$

wobei wir die zweite Summe mit Hilfe der Formel für die geometrische Reihe ausgerechnet haben.

Daraus folgt die Gleichung

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = 2S_n + 2^{n+2} - 2$$

mit der Lösung

$$S_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Literatur

[GKP94] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik *Concrete mathematics*, Addison-Wesley, 1994.